I-5 Transformada de Fourier

Comunicações

(21 Abril 2009)

Sumário

1. Sinais não periódicos
2. Transformada de Fourier
   1. Representação, no domínio da frequência, de sinais não periódicos
   2. Relação com a série de Fourier
   3. Equação de análise e de síntese
3. Sinais típicos
   1. Pulso rectangular e triangular
   2. Pulso sinusoidal
4. Largura de banda e energia
5. Resposta em frequência
6. Exercícios

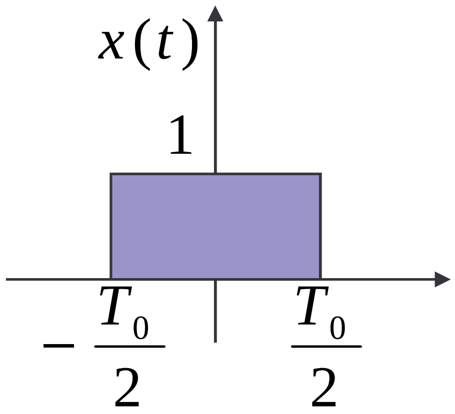
1. Sinais não periódicos

- Não apresentam padrões de repetição
- Tipicamente caracterizados pela energia (finita)
- Não têm frequência fundamental, nem período fundamental
- São representados no domínio da frequência por um espectro contínuo

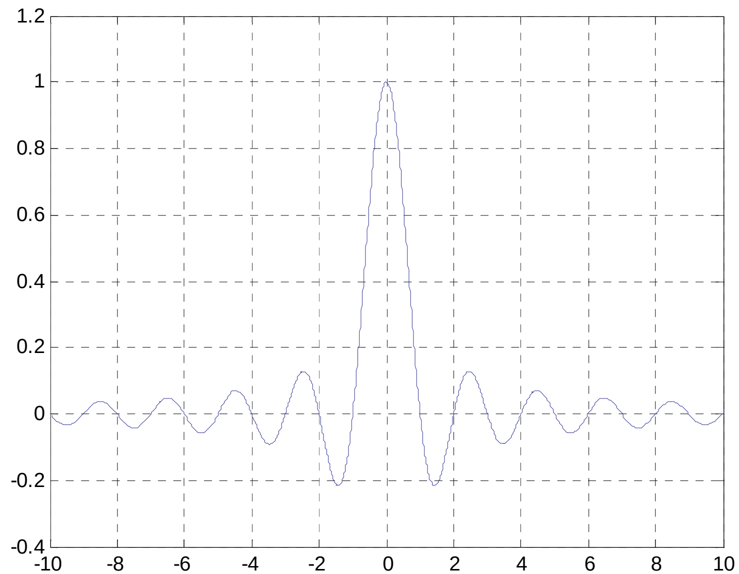
1. Sinais não periódicos

- Exemplos: Pulso Rectangular e Sinc
- Sinais de energia finita

$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$



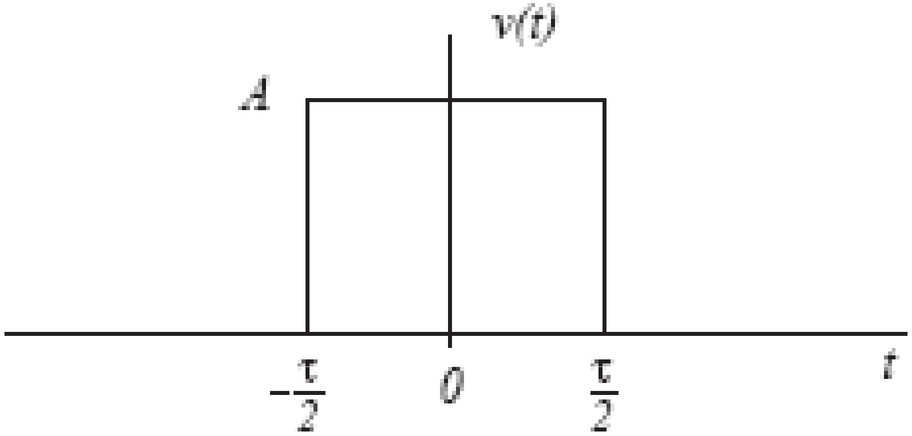
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right) = \prod\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1, |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0, |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$



$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$

1. Sinais não periódicos

Pulso Rectangular



Sinal estritamente limitado no tempo: $v(t)=0$ fora do intervalo $\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$
A energia é

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|v(t)^2\right|dt$$

$$E=A^2\tau$$

2.Transformada de Fourier

- Sinal não periódico corresponde a sinal periódico com período fundamental T_o a tender para infinito

- Assim, f_o, $2f_o$, $3f_o$, ... tendem para zero

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \exp(j2\pi k f_o t)$$

Com f_o a tender para zero

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df$$

Equação de síntese
ou transformada inversa

Joseph Fourier
(1768 – 1830)

2.Transformada de Fourier

- O espectro X(f) é obtido através de

$$X(f) = \langle x(t), \exp(j2\pi ft) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt$$

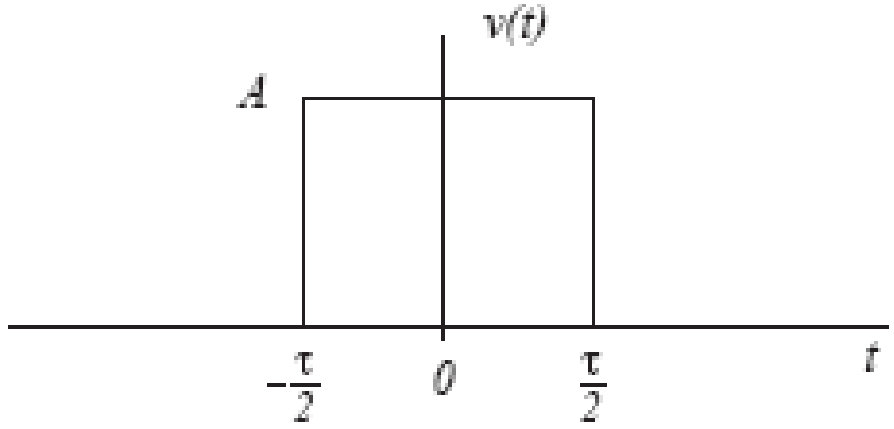
Produto interno entre x(t) e <u>todas</u> as frequências do espectro

É a equação de análise ou transformada directa

X(f) é obtido pelo produto interno entre x(t) e <u>todas</u> as frequências do espectro

X(f) é uma função contínua

3. Sinais Típicos: pulso rectangular

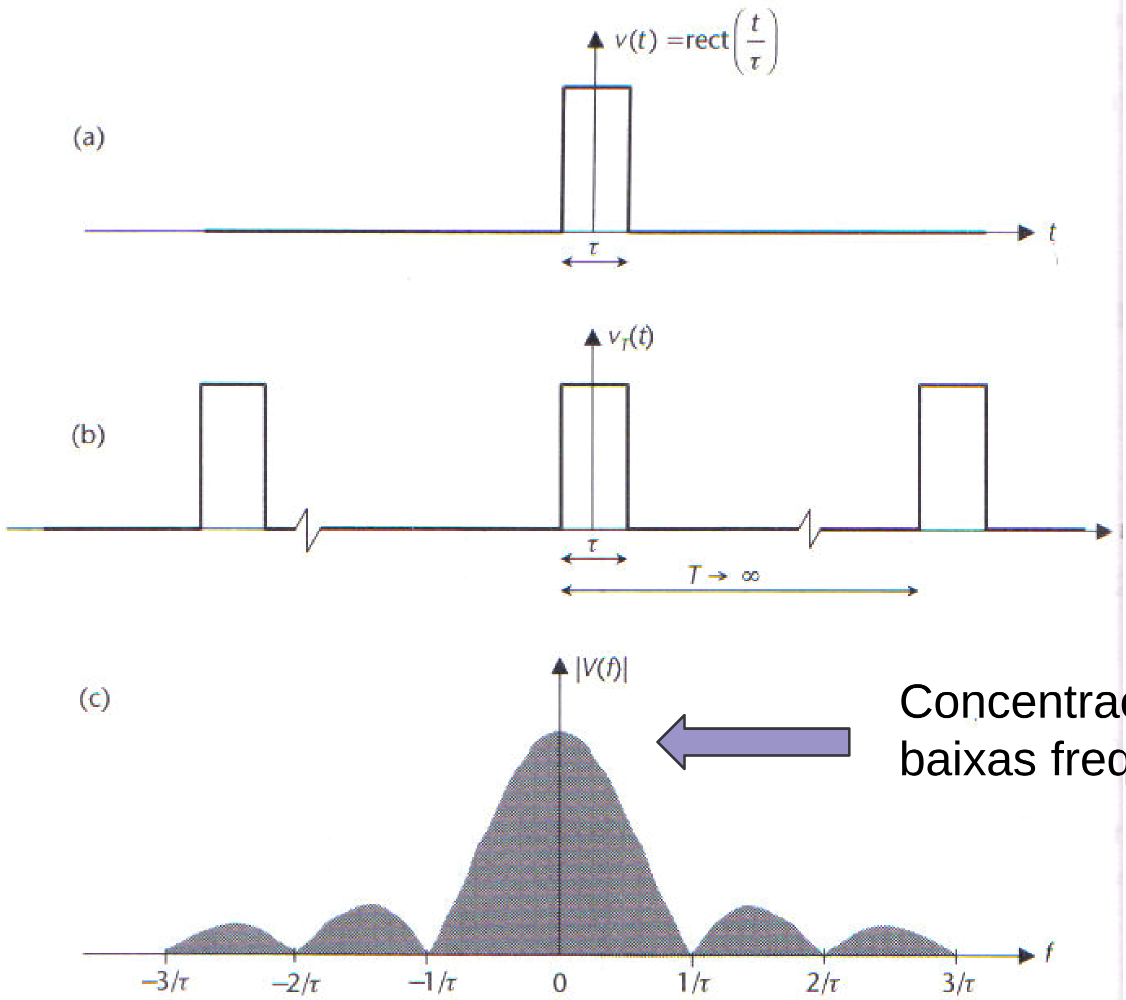


$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases} \qquad v(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$V(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{A}{\pi f}\sin(\mathrm{f}\ \tau) = A\tau\,\mathrm{sinc}(\mathrm{f}\ \tau)$$

$$V(0) = A\tau$$

3. Sinais Típicos: pulso rectangular



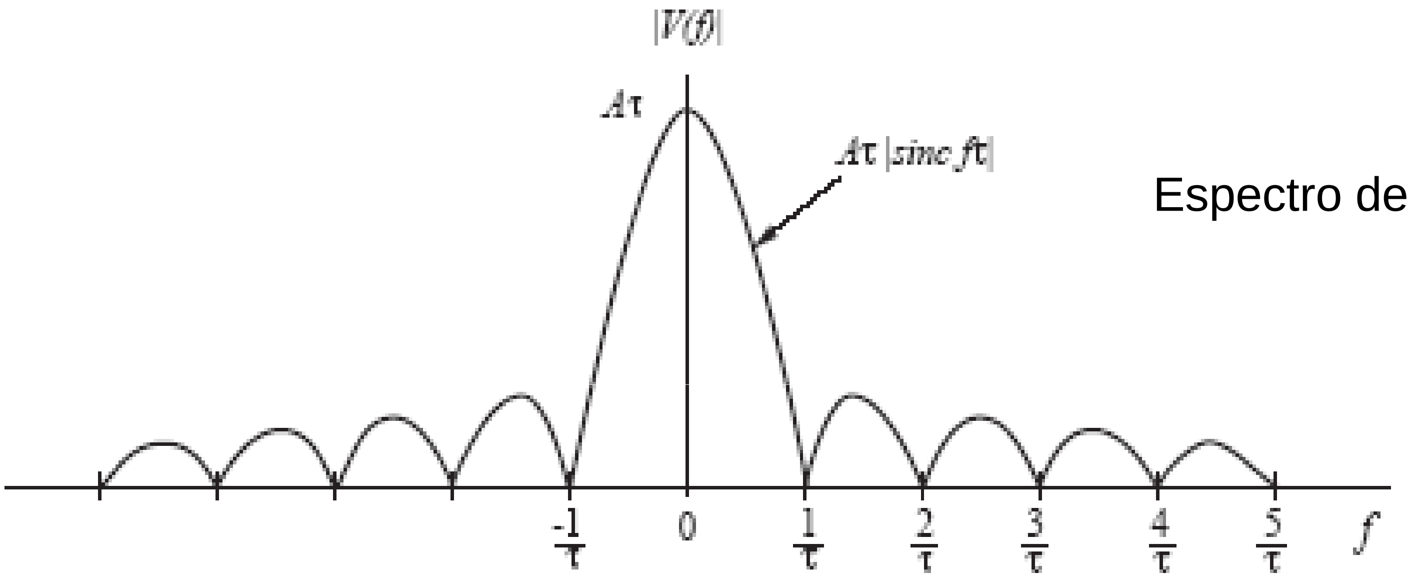
$$v(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Onda quadrada com período a tender para infinito

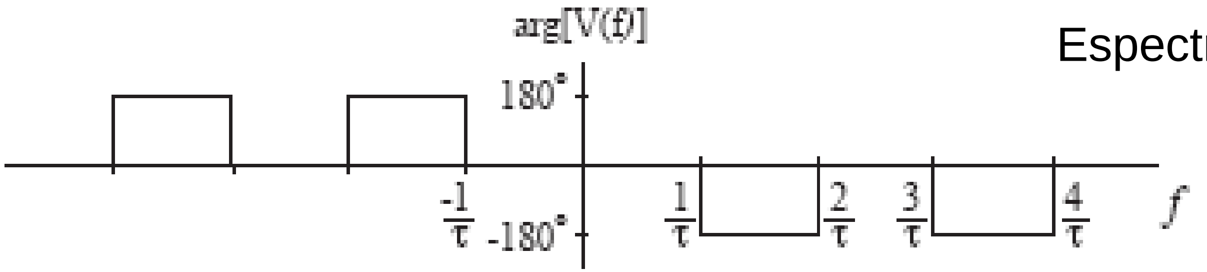
Concentração de energia nas baixas frequências

$$V(f) = A\tau \,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

3. Sinais Típicos: pulso rectangular



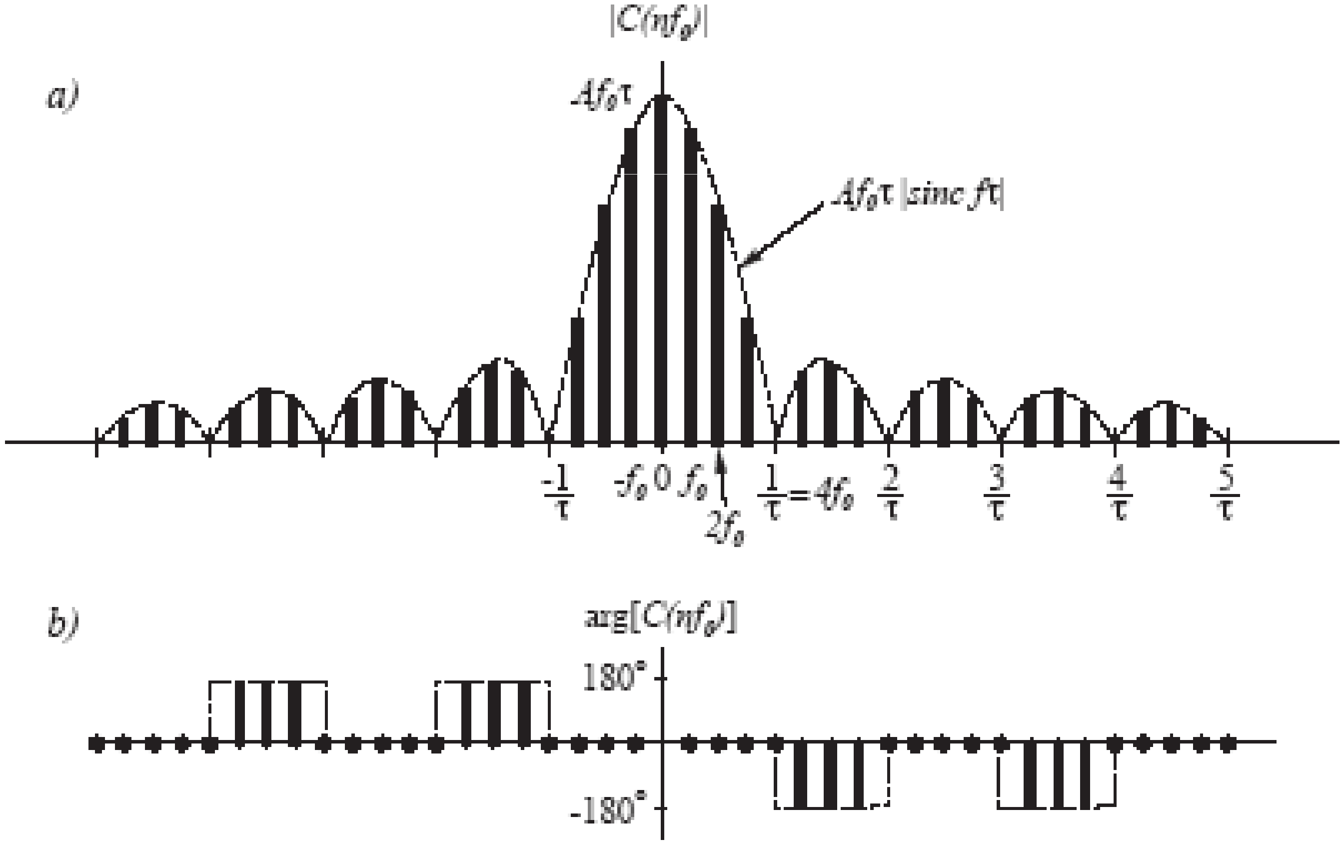
Espectro de Amplitude



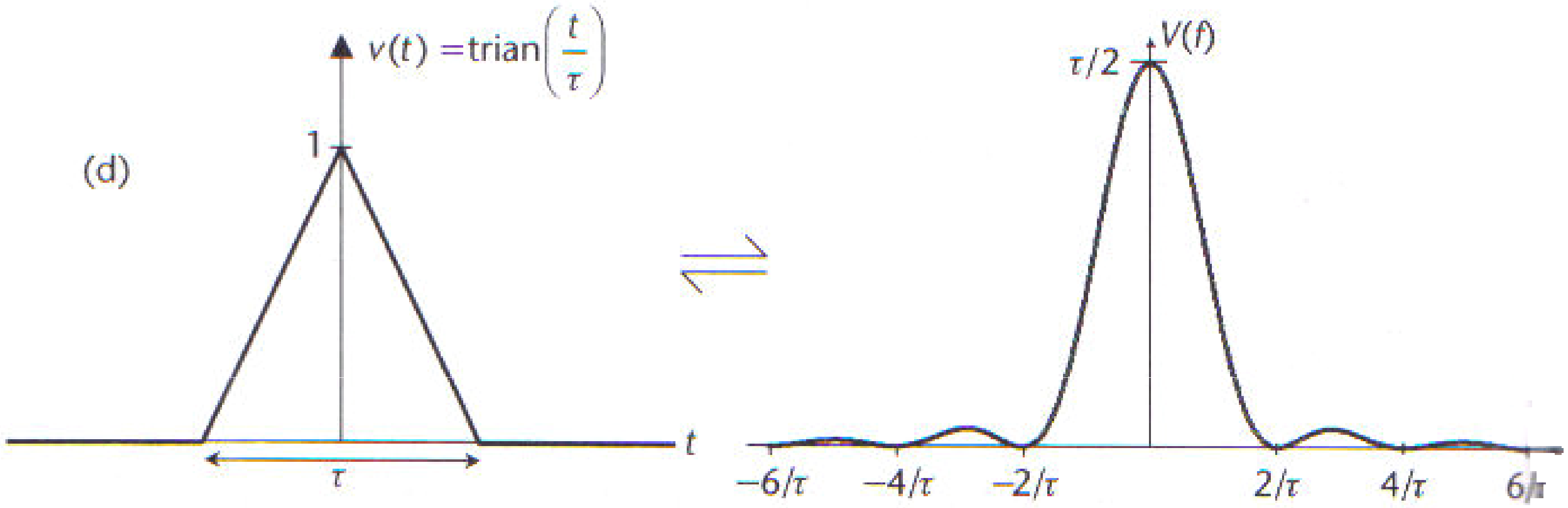
Espectro de Fase

3. Sinais Típicos: pulso rectangular

Revisão do espectro da sequência de pulsos rectangulares (onda quadrada)

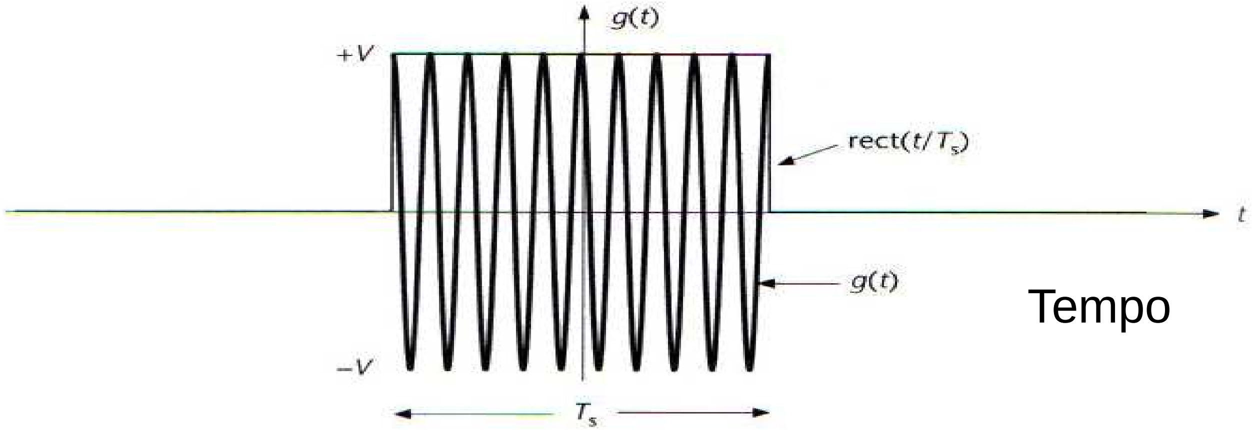


3. Sinais Típicos: pulso triangular



3. Sinais Típicos: pulso sinusoidal

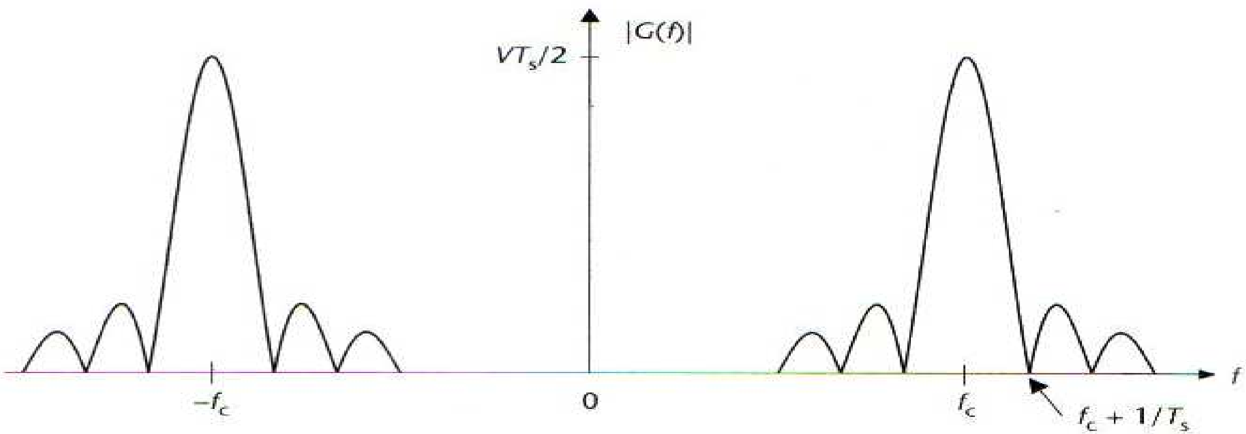
• O Pulso Sinusoidal - resulta do produto de uma sinusóide por um pulso rectangular



Tempo

Energia de símbolo

$$E = \frac{V^2}{2} T_s$$



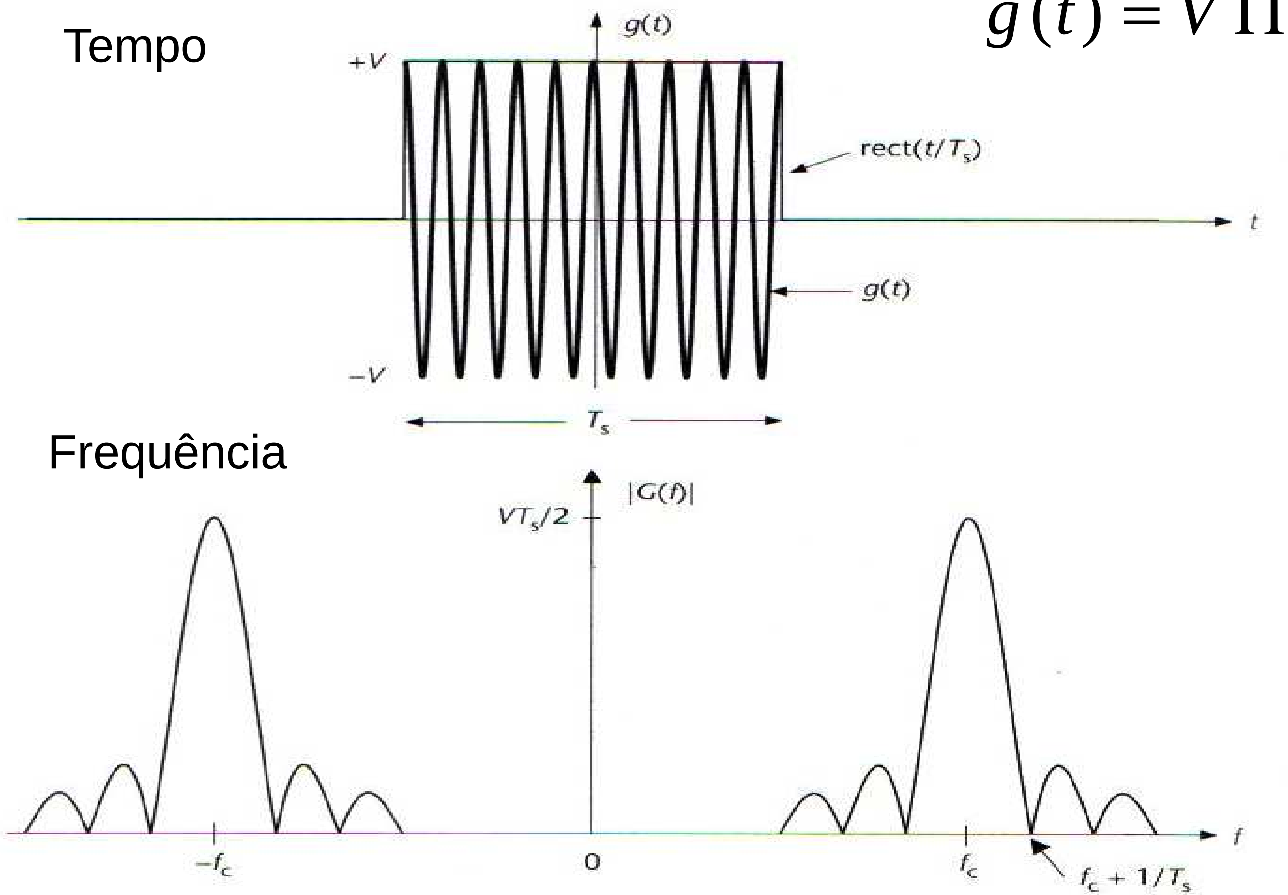
Frequência

3. Sinais Típicos: pulso sinusoidal

$$g(t) = V\,\Pi\left(\frac{t}{Ts}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

Tempo

Frequência



$$G(f) = V\frac{T_s}{2}\mathrm{sinc}((f - f_c)T_s) + V\frac{T_s}{2}\mathrm{sinc}((f + f_c)T_s)$$

4. Cálculo da energia

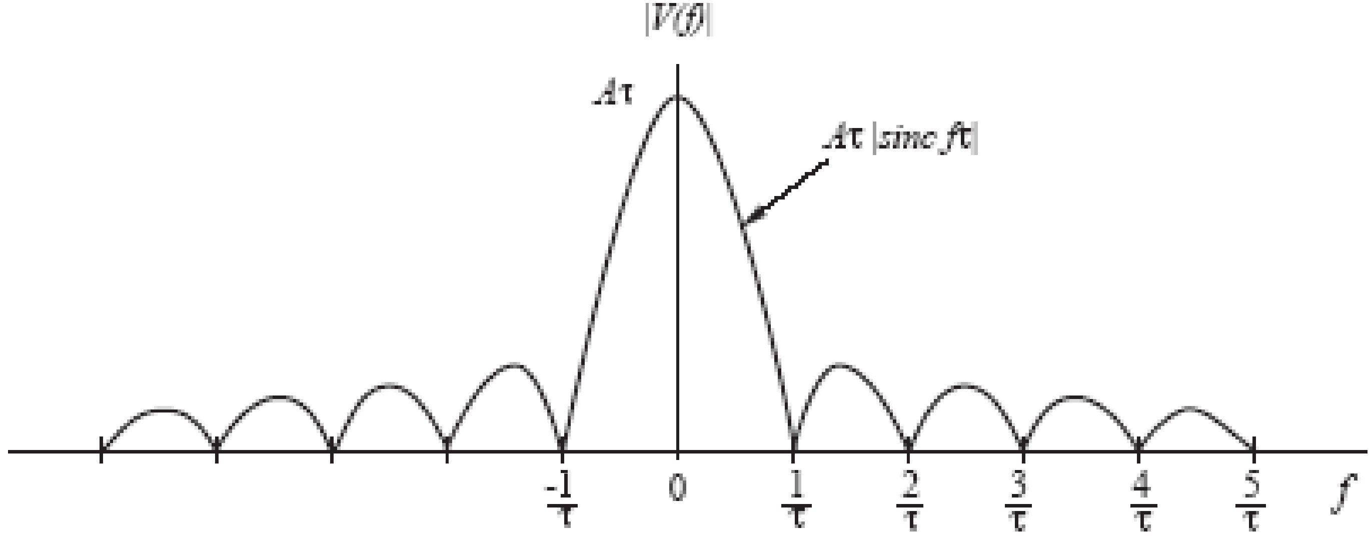
- A energia pode ser calculada através do espectro
- Teorema de Rayleigh
- Relação idêntica ao teorema da potência de Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| V(f) \right|^2 df$$

$$Gv(f) = \left| V(f) \right|^2$$

densidade espectral energia (Joules/Hz)

4. Cálculo da energia



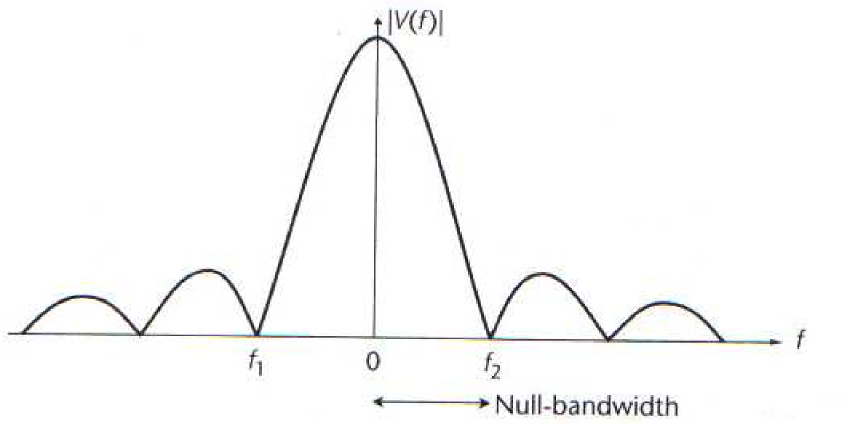
$$E_{\frac{1}{\tau}} = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left|V(f)\right|^2 df = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau)df$$

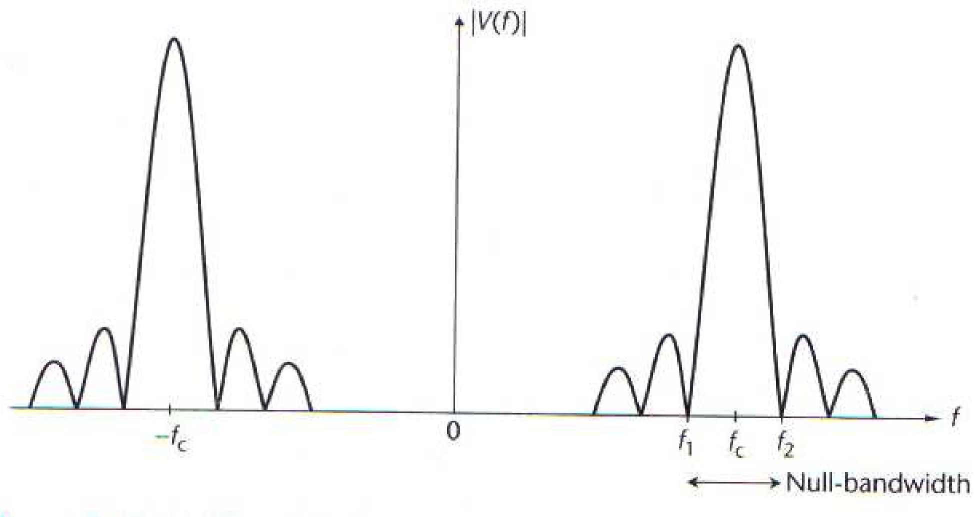
$$E_{\frac{1}{\tau}} = 0.92A^2\tau \longleftarrow$$

No lobo principal da sinc, temos 92 % da energia total

Concentração da energia nas baixas frequências

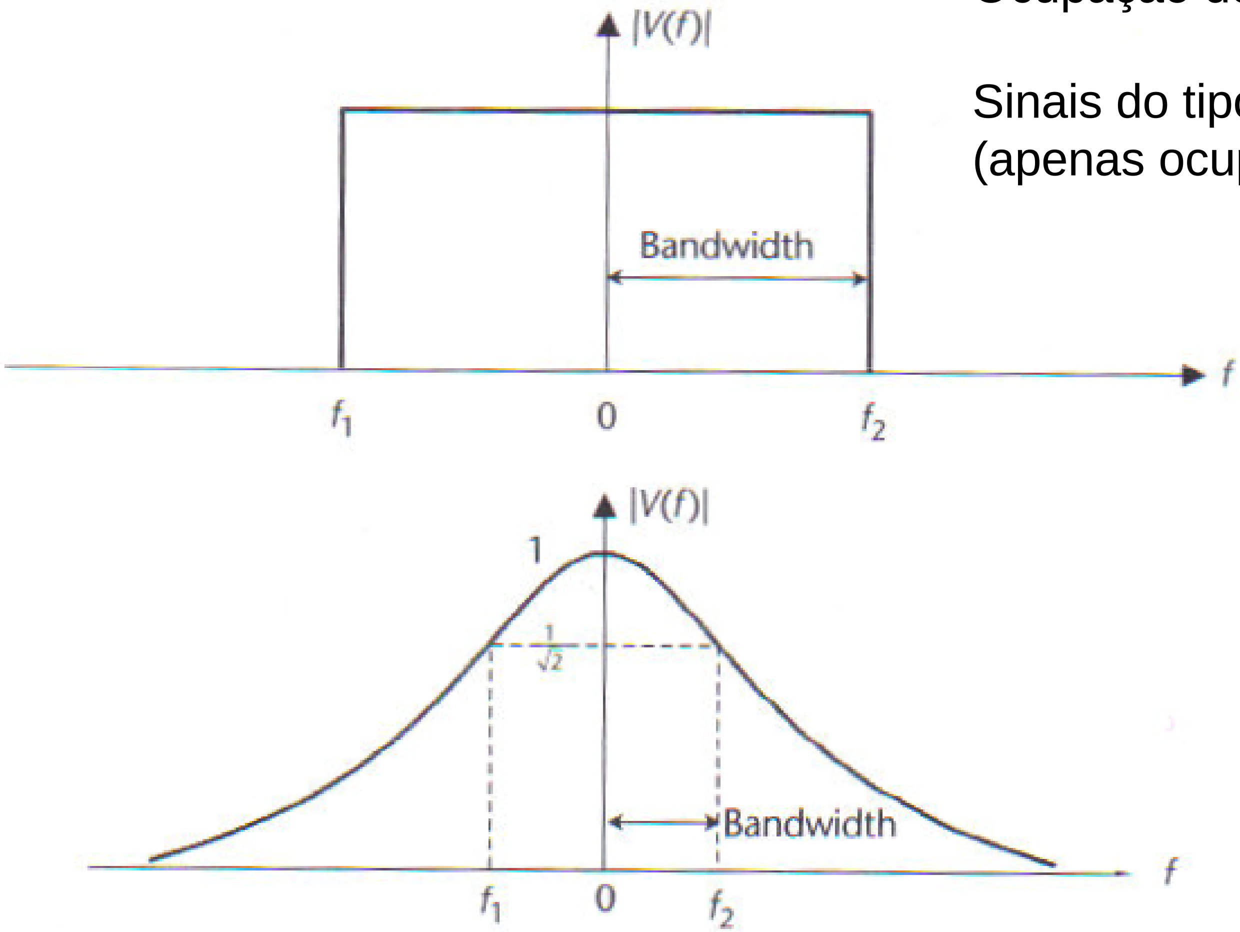
4. Largura de banda





Definida a partir dos zeros espectrais

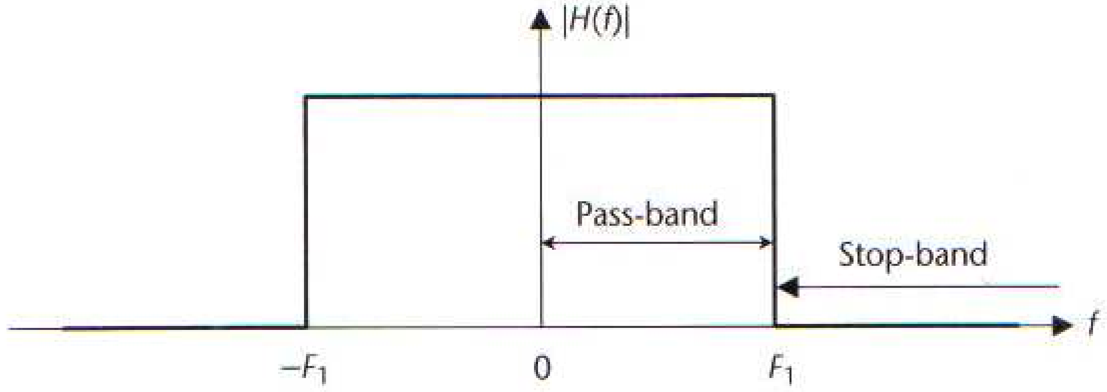
4. Largura de banda

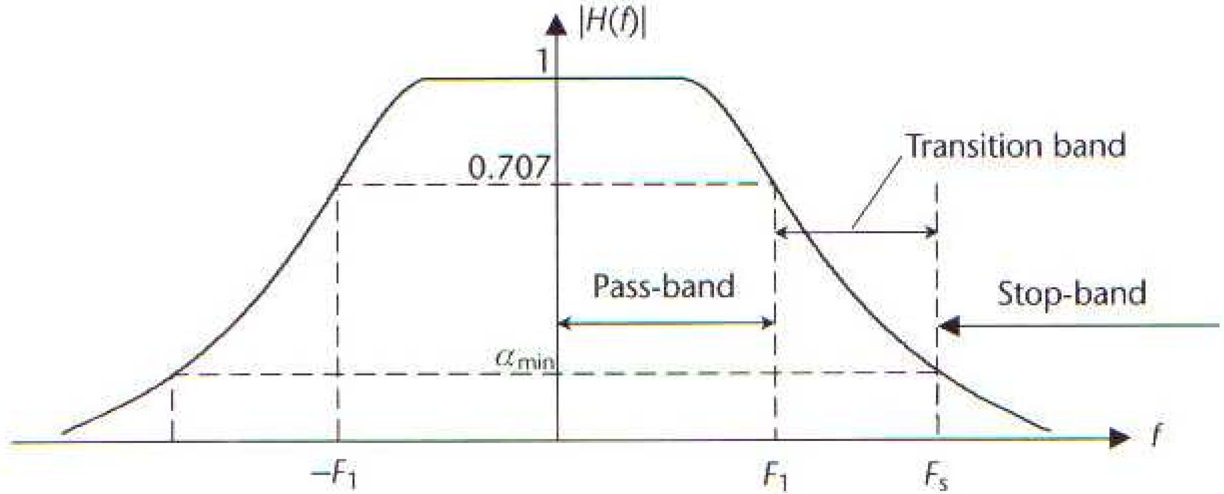


Ocupação do espectro

Sinais do tipo passa-baixo
(apenas ocupam as baixas frequências)

5. Resposta em frequência: filtro passa baixo ideal (teórico) e real (prático)





6. Exercícios

Sejam x(t)=3 rect (t / 10) e y(t)=10sinc(100t).

a) Apresente as expressões dos espectros de x(t) e y(t).
b) Qual o valor da energia e largura de banda de cada sinal?

Considere z(t) = 5 rect (t / 0,1) cos (2 pi 20 t)

a) Obtenha a expressão de Z(f)
b) Esboce Z(f)