I-6
Sistemas e Resposta em Frequência

Comunicações

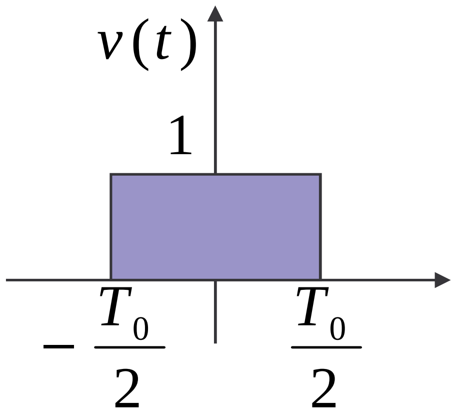
(23 Abril 2009)

Sumário

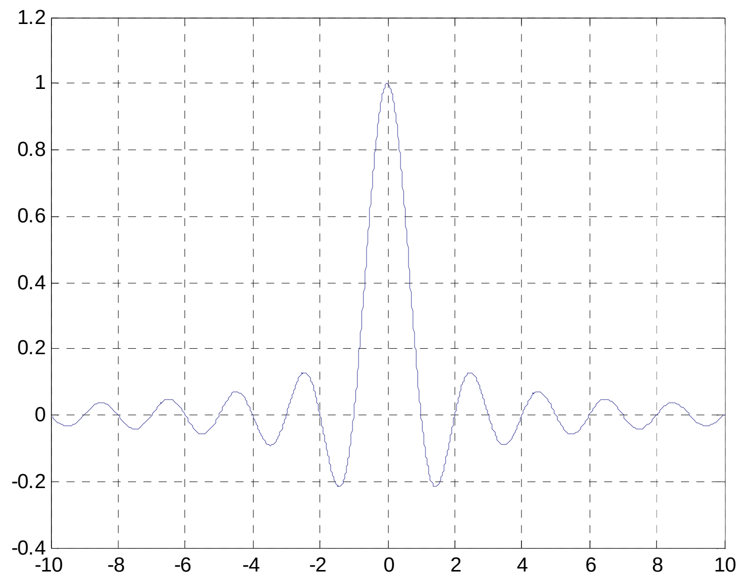
1. A função especial delta-dirac
2. Sistemas
3. Resposta impulsional e resposta em frequência
4. Tipos de filtragem
5. Associação de sistemas
    1. Série
    2. Paralelo
6. Distorção de amplitude e de fase
7. Exercícios

1. Função especial delta-dirac

- O espectro do pulso rectangular é definido por uma sinc

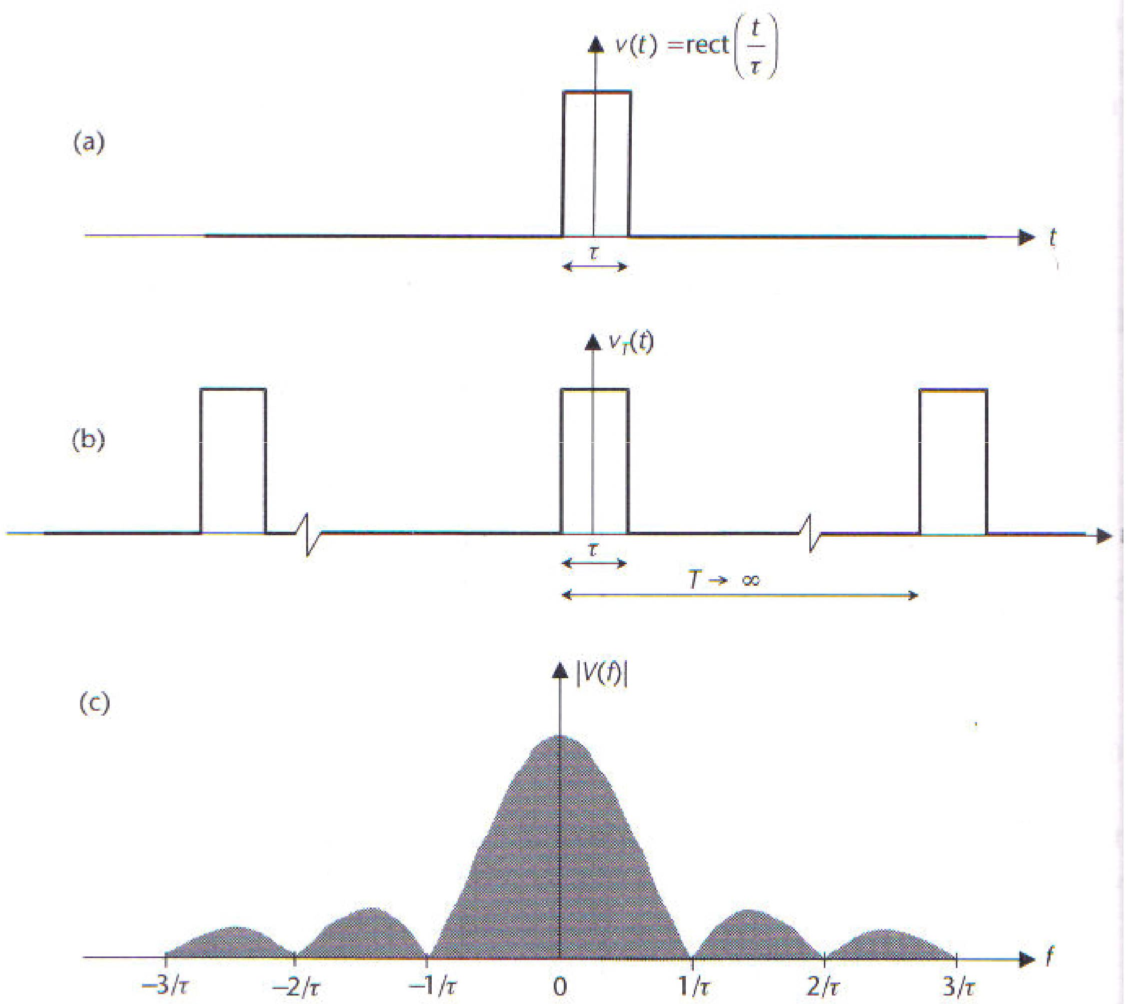


$$v(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \prod\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1, |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0, |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$



$$V(f) = T_o \mathrm{sinc}(fT_o)$$

1. Função especial delta-dirac

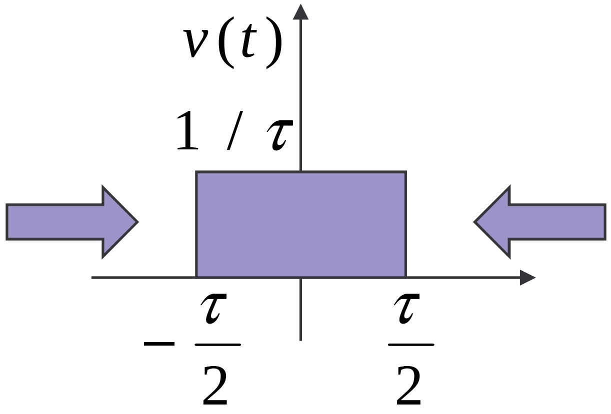


$$v(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$V(f) = A\tau \,\text{sinc}(f\tau)$$

1. Função especial delta-dirac

- Pulso rectangular de área unitária
- Considere-se que τ tende para 0
- Compressão no tempo conduz a expansão na frequência



$$v(t) = \frac{1}{\tau}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

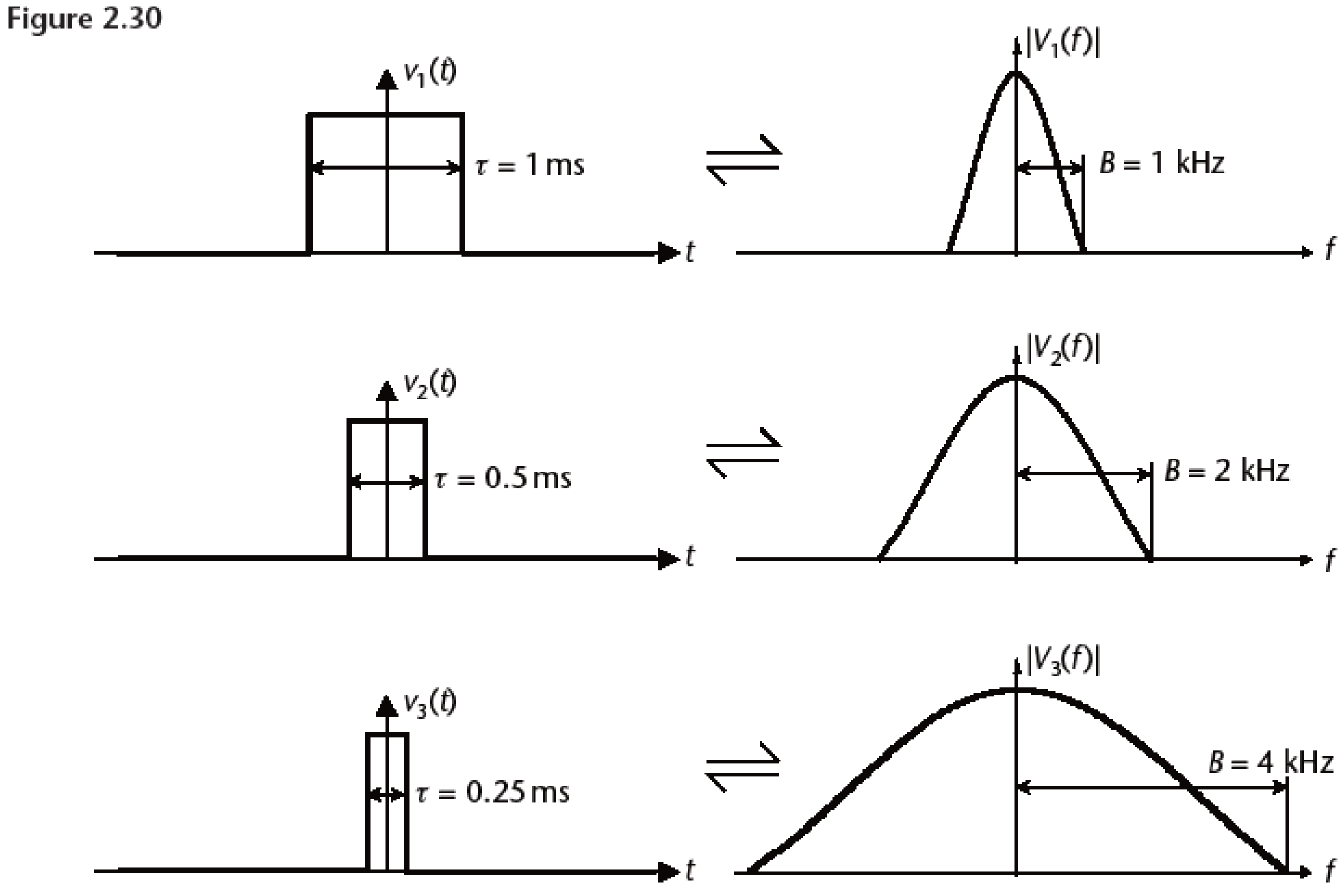
$$V(f) = \frac{1}{\tau}\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau) = \mathrm{sinc}(f\tau)$$

O primeiro zero espectral localiza-se em f = 1 / τ

τ tende para zero

Assim, o primeiro zero espectral encontra-se em frequência infinita

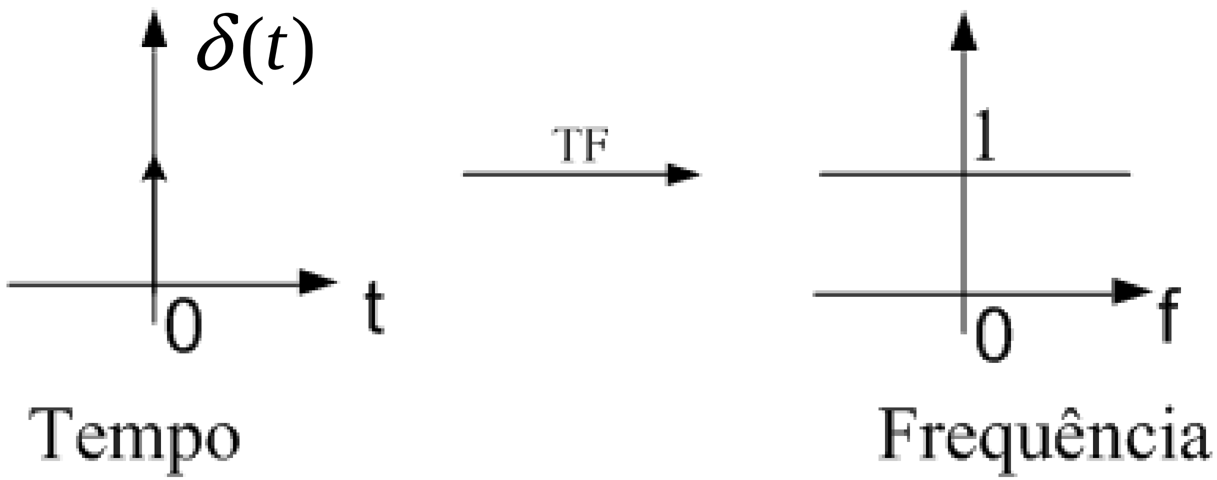
1. Função especial delta-dirac



Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

1. Função especia delta-dirac

- Resulta da compressão temporal infinita de um pulso rectangular
- O seu espectro é constante; todas as frequências têm a mesma contribuição TF[δ(t)] = 1.



2. Sistemas

- Define-se **sistema** como um objecto que manipula um ou mais sinais para realizar certa função, produzindo um novo sinal.

  - diz-se **contínuo** ou **discreto** conforme o tipo de sinais que manipula.
  - a análise dos sinais de entrada e de saída pode ser realizada no domínio do tempo ou no domínio da frequência

2. Sistemas

- Realizam operações sobre sinais

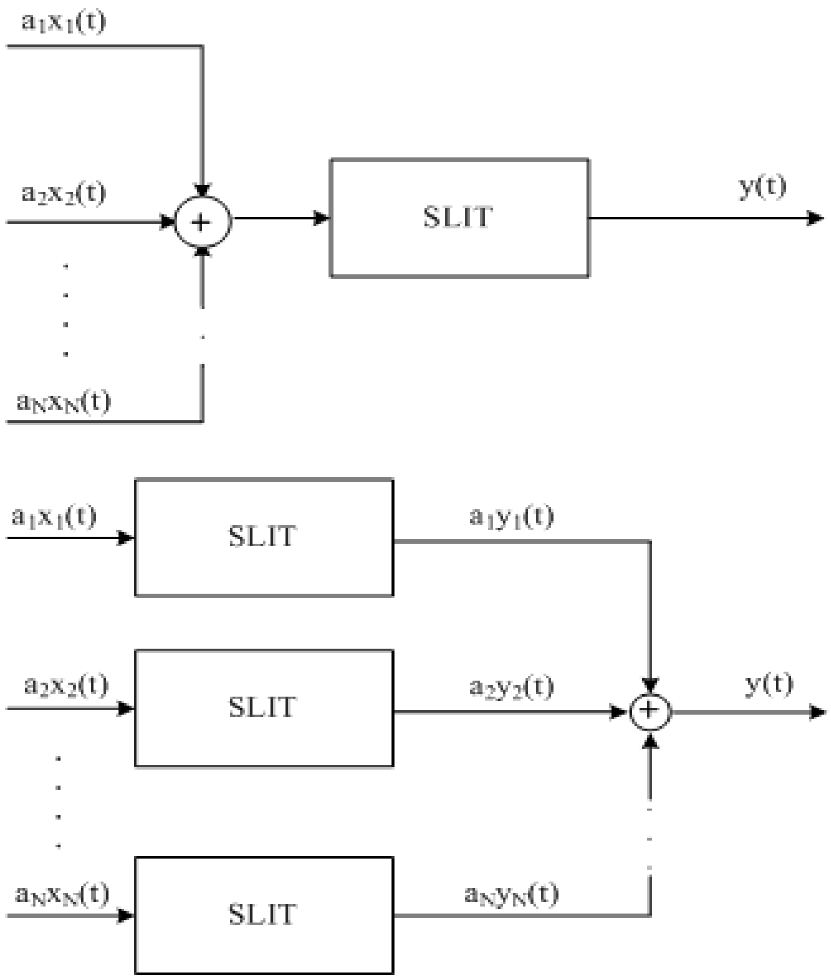
- Sobre a variável dependente (amplitude)
  - Amplificação ou atenuação
  - Adição
  - Multiplicação

- Sobre a variável independente (eixo dos tempos)
  - Escalamento
  - Deslocamento
  - Reflexão

2. Sistemas

- SLIT – Sistemas Lineares e Invariantes no tempo
- Sub-classe de sistemas lineares e invariantes no tempo
- Linearidade
  - $S(a_1x_1(t) + a_2x_2(t) +\ldots + a_Nx_N(t)) = a_1S(x_1(t)) + a_2S(x_2(t)) +\ldots + a_NS(x_N(t))$
  - A aplicação do sistema a uma combinação linear de sinais é igual à combinação linear das saídas individuais com os mesmos factores de ponderação
- Invariância no tempo
  - $S(x(t)) \rightarrow y(t)$
  - $S(x(t - b)) \rightarrow y(t - b)$
  - O sistema responde de forma idêntica a determinado sinal, independentemente da altura em que o sinal é apresentado

2. SLIT - Linearidade



Linearidade

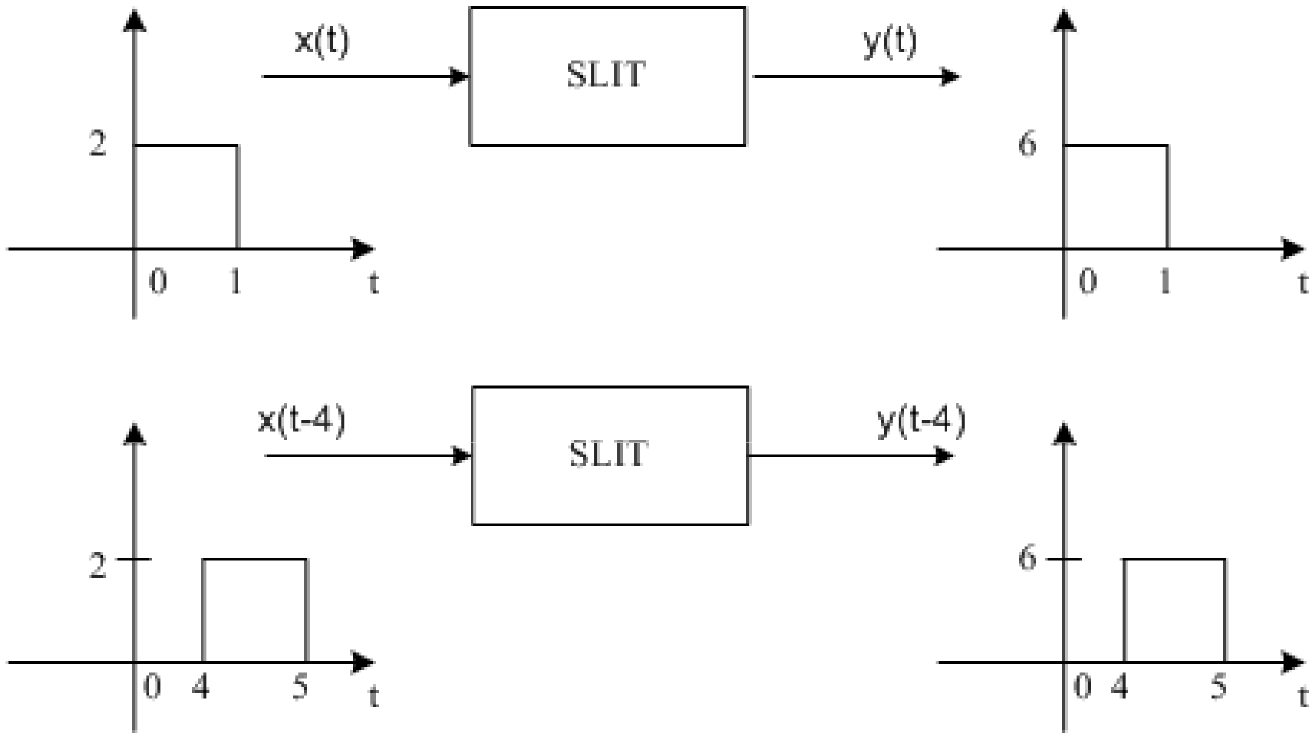
$$S(\ a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots + a_Nx_N(t)\ )$$

$$=$$

$$a_1S(x_1(t)) + a_2S(x_2(t)) + \ldots + a_NS(x_N(t))$$

Nota: A Transformada de Fourier é linear

2. SLIT – Invariância no tempo



Invariância no tempo

$S(\ x(t)\ ) \rightarrow y(t)$

$S(\ x(t-4)\ ) \rightarrow y(t-4)$

2. SLIT

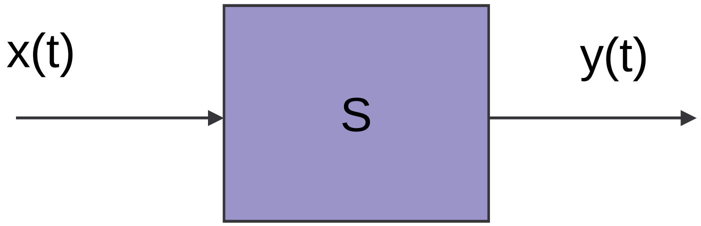
- O comportamento do SLIT pode ser representado por um sinal:
  - h(t), resposta impulsional (no domínio do tempo)
  - H(f), resposta em frequência (no domínio da frequência)

- A resposta em frequência é a Transformada de Fourier da resposta impulsional
  - H(f) = TF[h(t)]

3. Resposta impulsional

- A **<u>resposta impulsional h(t)</u>** é a saída do SLIT quando

na entrada está presente o impulso delta-dirac

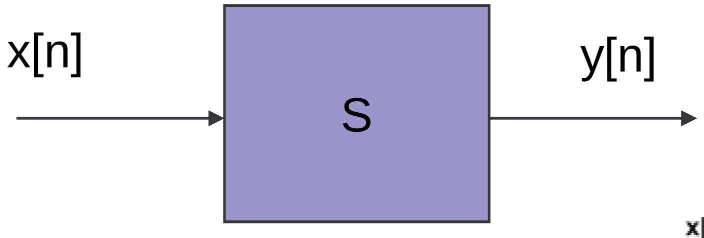


$$h(t) = y(t) \quad \text{com} \quad x(t) = \delta(t)$$

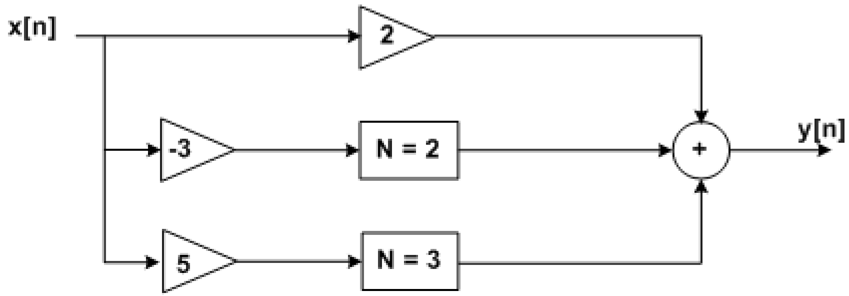
- A resposta impulsional h(t) caracteriza o comportamento do sistema no domínio do tempo

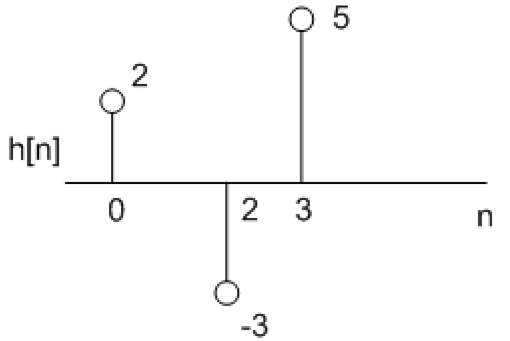
3. Resposta impulsional

- Para sistemas discretos a **<u>resposta impulsional h[n]</u>** é a saída do sistema quando na entrada está presente δ[n]



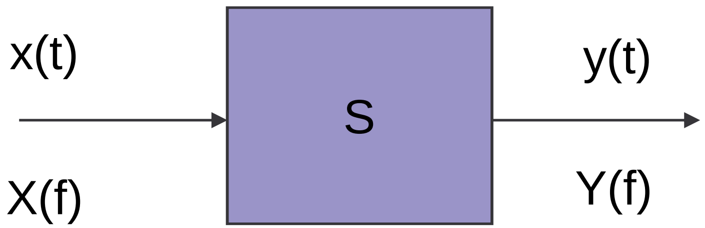
$$h[n] = y[n] \quad \text{com} \quad x[n] = \delta[n]$$





3. Resposta em frequência

- A **<u>resposta em frequência H(f)</u>** caracteriza o comportamento no domínio da frequência
- Indica qual o ganho que o sistema aplica a cada frequência



$$Y(f) = X(f)H(f)$$

As componentes de frequência que constam de Y(f) são aquelas que:

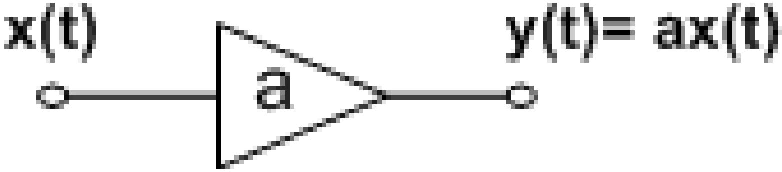
$$H(f) = Y(f) \quad \text{com} \quad X(f) = 1$$

- estão presentes em X(f) e
- o sistema tem ganho não nulo

Temos assim a intersecção do espectro de entrada com a resposta em frequência

3. Resposta em frequência

- Exemplo: sistema amplificador



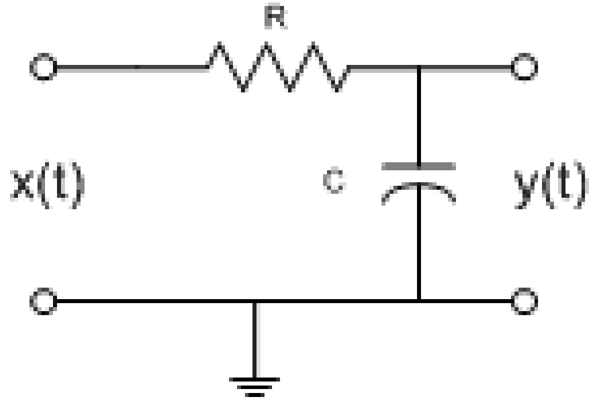
$$Y(f) = H(f)X(f) = aX(f)$$

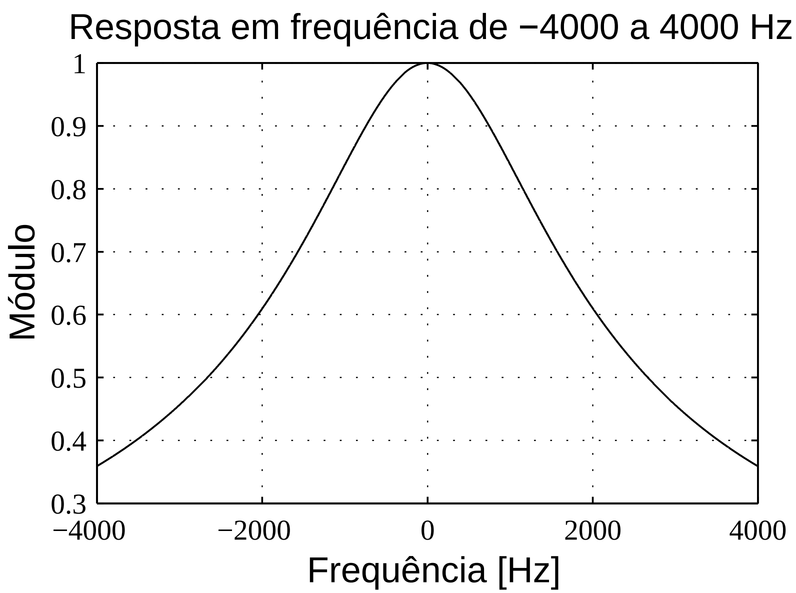
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = a$$

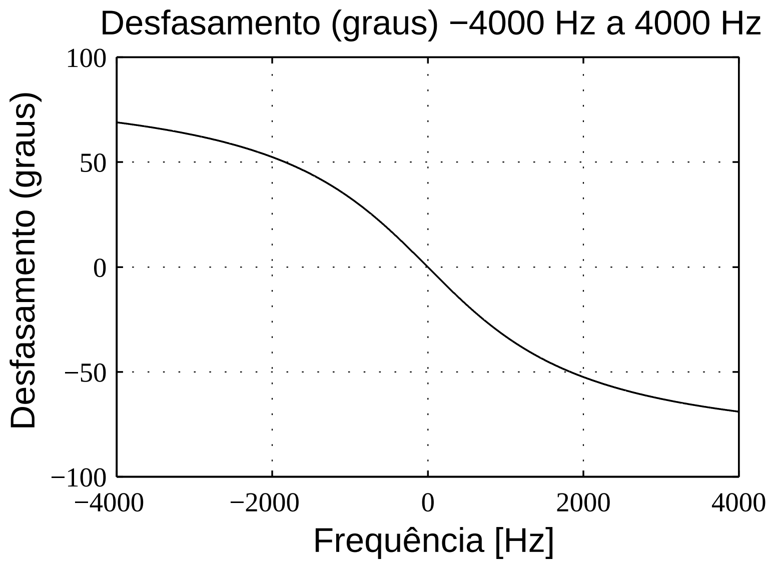
3. Resposta em frequência

- Exemplo: circuito RC

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC}$$







|H(f)| R=4,7 kΩ C=22 nF arg[H(f)]

4. Filtragem

- Tendo em conta que $Y(f) = X(f)H(f)$

- As componentes de frequência que **constam** de X(f) e **não constam** de Y(f) são filtradas (eliminadas) pelo sistema

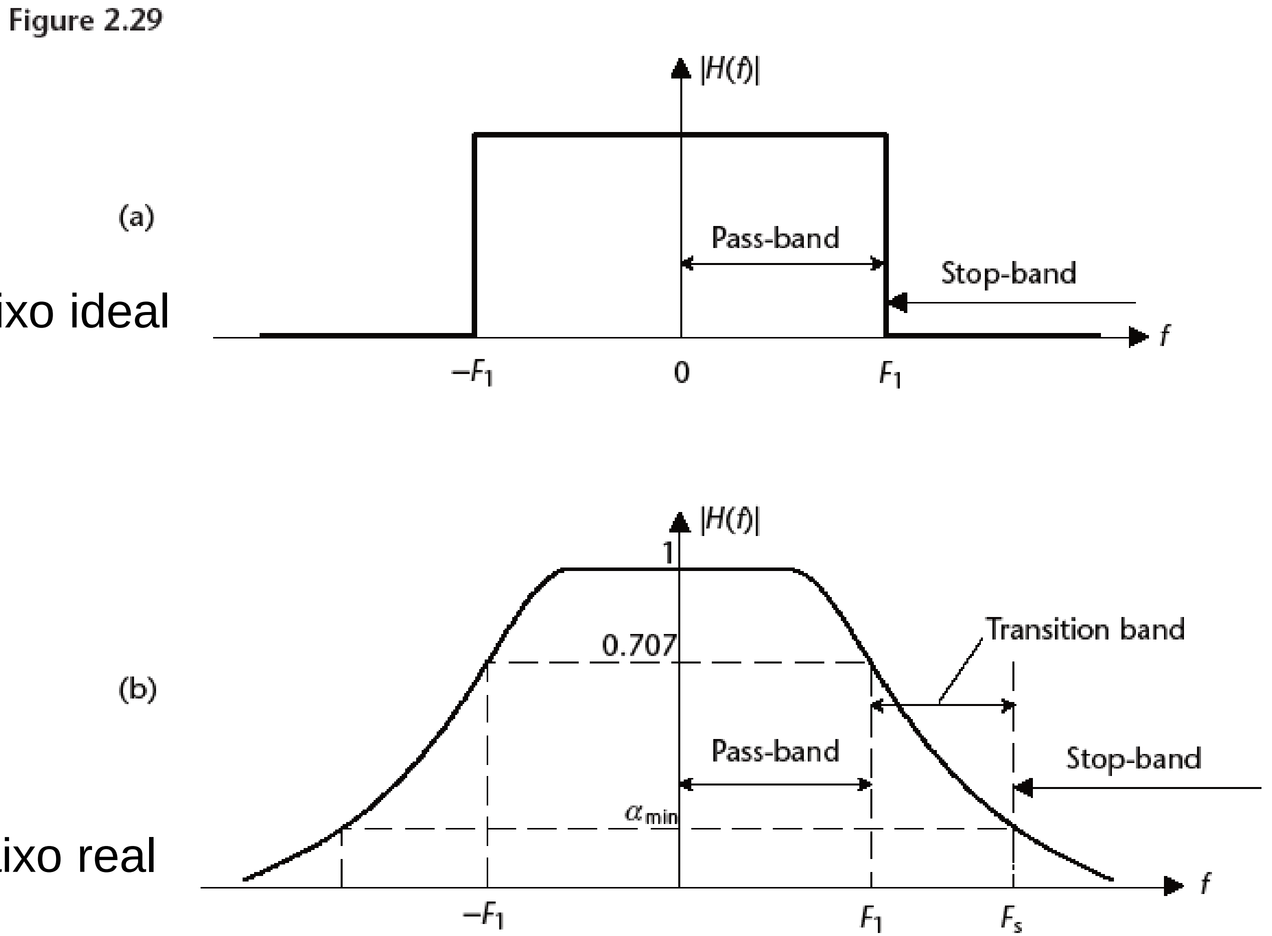
- Assim, o tipo de filtragem é definido pela função H(f)

- Existem 4 tipos de filtragem típicos:
  - Passa-baixo
  - Passa-banda
  - Passa-alto
  - Rejeita-banda

4. Tipos de filtragem

Filtro passa-baixo ideal

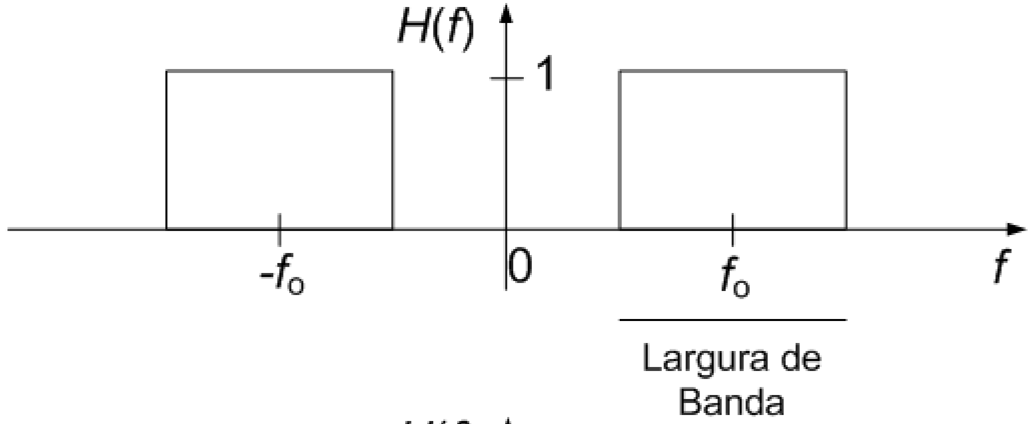
Filtro passa-baixo real



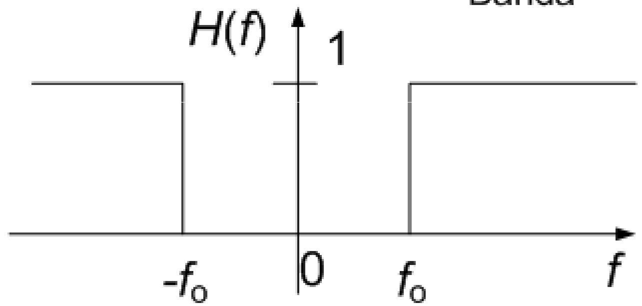
Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

4. Tipos de filtragem

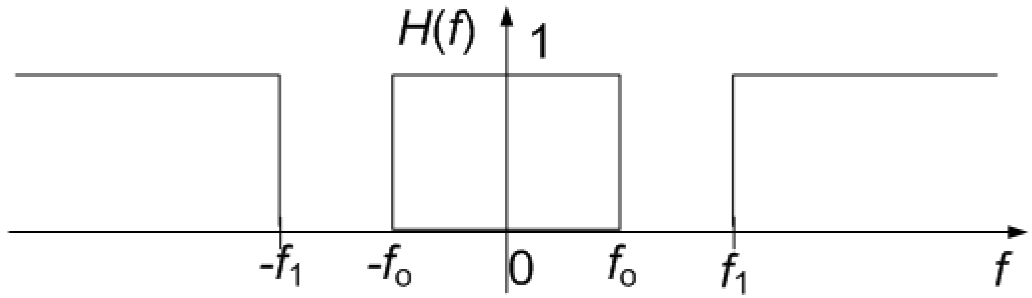
Filtro passa-banda ideal



Filtro passa-alto ideal

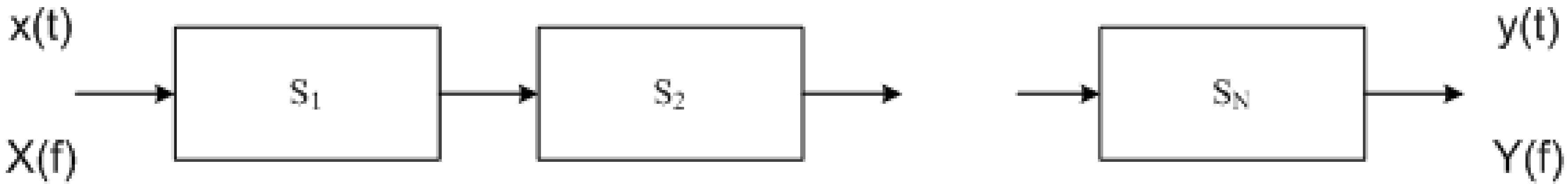


Filtro rejeita-banda ideal



5. Associação de sistemas

- Associação **série ou cascata**

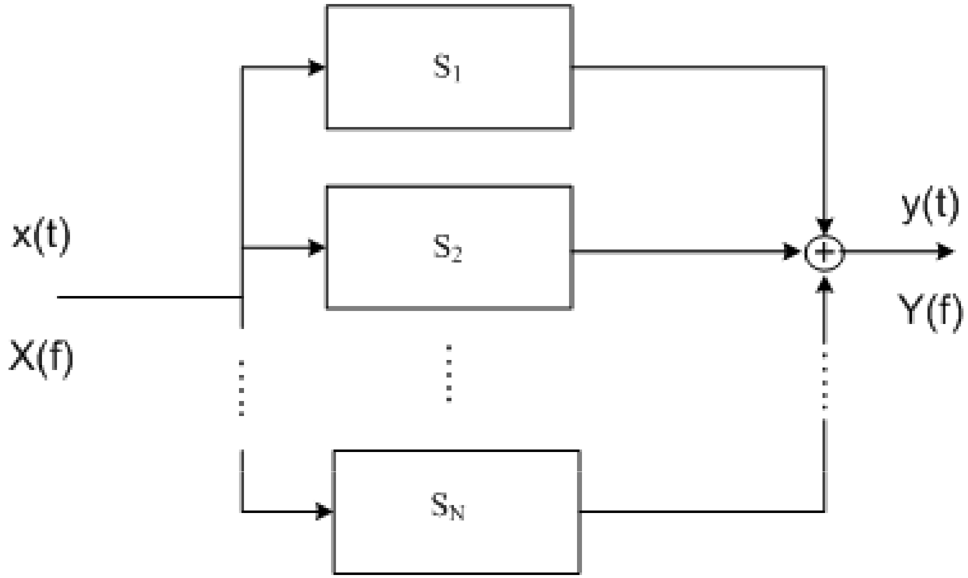


- A **resposta em frequência equivalente** é o produto das sucessivas respostas em frequência individuais

$$H_{eq}(f) = H_1(f)H_2(f)..H_N(f)$$
$$= \prod_{k=1}^{N} H_k(f)$$

5. Associação de sistemas

- Associação **paralelo**



- A **resposta em frequência equivalente** é a soma das sucessivas respostas em frequência individuais

$$H_{eq}(f) = H_1(f) + H_2(f) + \ldots + H_N(f)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} H_k(f)$$

6. Distorção

- Relação input/output no domínio da frequência

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$|Y(f)| = |X(f)H(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\arg[Y(f)] = \arg[X(f)] + \arg[H(f)]$$

- |H(f)| é o módulo da resposta em frequência
  - Indica o ganho que o sistema aplica a cada frequência
- arg[H(f)] é a fase da resposta em frequência
  - Indica o desfasamento que o sistema impõe a cada frequência

6. Distorção

- Exemplo $|H(f)| = 3$

$$\arg[H(f)] = -2\pi 0{,}001 f$$

- Com o sinal na entrada dado por $x(t) = 5 + 2\cos\left(2\pi 500t + \frac{\pi}{2}\right)$

- A expressão do sinal de saída é

$$y(t) = 5x3 + 2x3\cos\left(2\pi 500t + \frac{\pi}{2} + (-2\pi 0{,}001x500)\right)$$
$$= 15 + 6\cos\left(2\pi 500t + \frac{\pi}{2} + (-\pi)\right) = 15 + 6\cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{2}\right)$$

6. Distorção

- Temos **distorção de amplitude** quando

$$|H(f)| \neq \text{constante}$$

na largura de banda de interesse do sinal.

- Existe **distorção de fase** sempre que

$$\arg[H(f)] \neq -2\pi t_d f$$

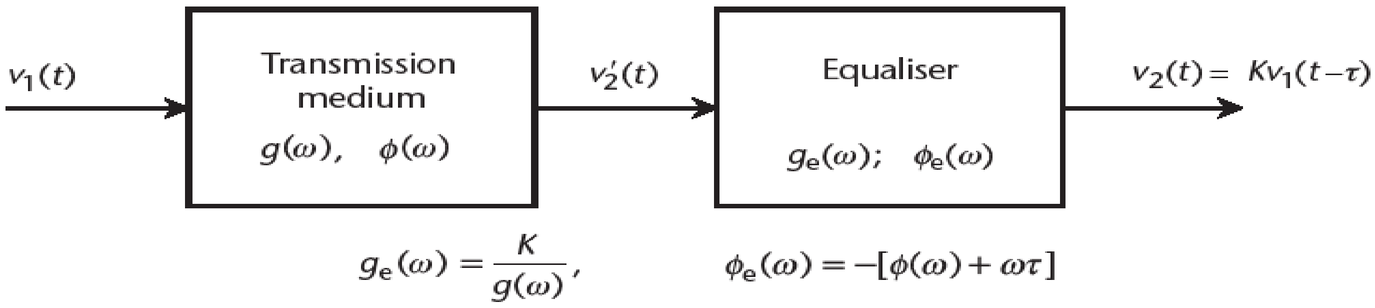
- Nota: no caso trivial e particular de fase nula, também não existe distorção de fase

- No caso de $\arg[H(f)] = -2\pi t_d f$ todas das frequências "sofrem" o mesmo atraso temporal t_d

6. Distorção

- Compensação da distorção - Equalização de canal (associação série de sistemas)
- Ausência de distorção com sinal de saída $kv_1(t-\tau)$, quando na entrada temos $v_1(t)$

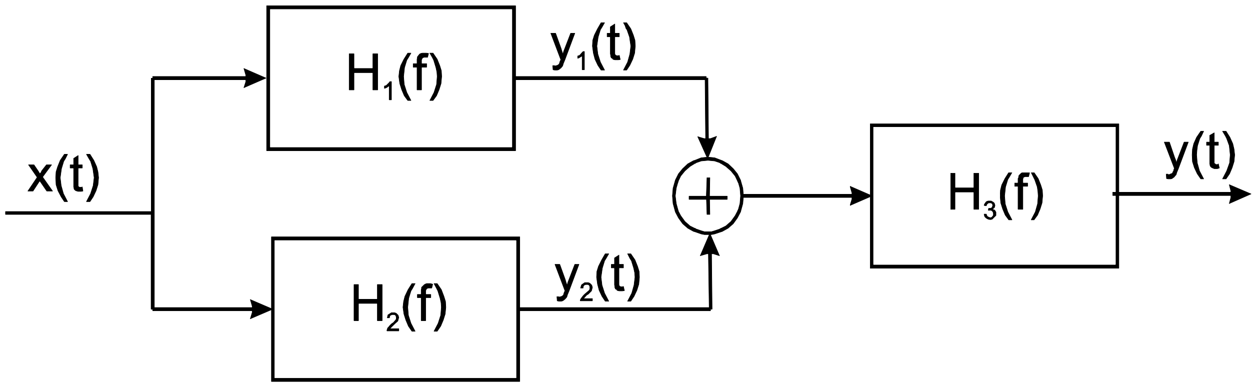
Figure 2.43



7. Exercícios

Considere a associação de sistemas com

$$H_1(f) = \prod\left(\frac{f}{6000}\right) \quad , \quad H_2(f) = \prod\left(\frac{f}{2000}\right) \quad \text{e} \quad H_3(f) = \prod\left(\frac{f-2000}{1000}\right) + \prod\left(\frac{f+2000}{1000}\right)$$

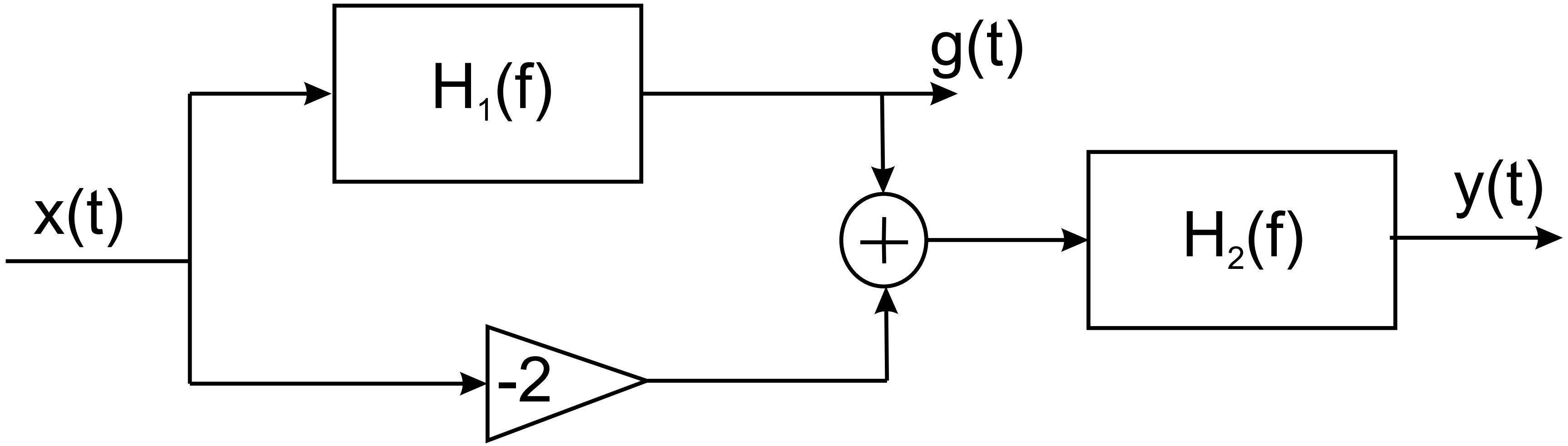


a) Determine a resposta em frequência equivalente da associação da figura

b) Qual a expressão de y(t), com x(t)= 5 + 2cos(2 pi 100t) + 4cos(2 pi 2000t) ?

7. Exercícios

Considere a associação de sistemas com $H_1(f) = 2\prod\left(\frac{f}{3000}\right)$ e $H_2(f) = \prod\left(\frac{f}{7000}\right)$



a) Determine a resposta em frequência equivalente da associação da figura

b) Considere que na entrada se apresenta uma onda quadrada de simetria par, com amplitude unitária, simetria par, duty cycle 50 % e período T=1 ms, determine as expressões de g(t) e y(t)