I-4
Espectro de sinais periódicos
A Série de Fourier

Comunicações

(3 Abril 2009)

Sumário

1. Sinais periódicos
    1. Sinusóide
    2. Onda quadrada
2. Espectro de amplitude e de fase
    1. Unilateral
    2. Bilateral
3. Série de Fourier
4. Cálculos
    1. Potência e valor médio
    2. Largura de banda
5. Exercícios
6. Outras aplicações

1. Sinais periódicos

- Sinais periódicos ou estritamente repetitivos
- Repetem-se a cada período fundamental
  - No domínio contínuo ou analógico (período T) temos

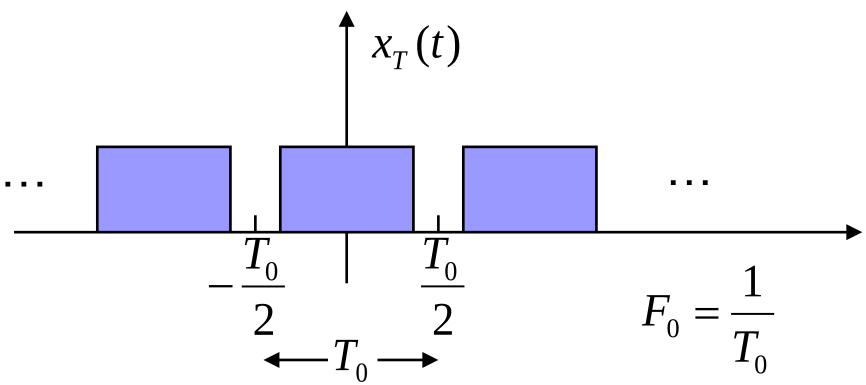
$$x(t) = x(t + kT)$$

  - Para o domínio discreto (período N) temos

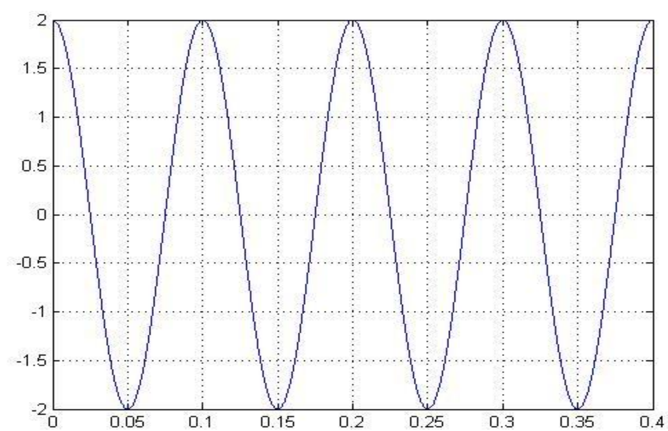
$$x[n] = x[n + kN]$$

k é inteiro relativo.

- Exemplos: Onda Quadrada



Sinusóide



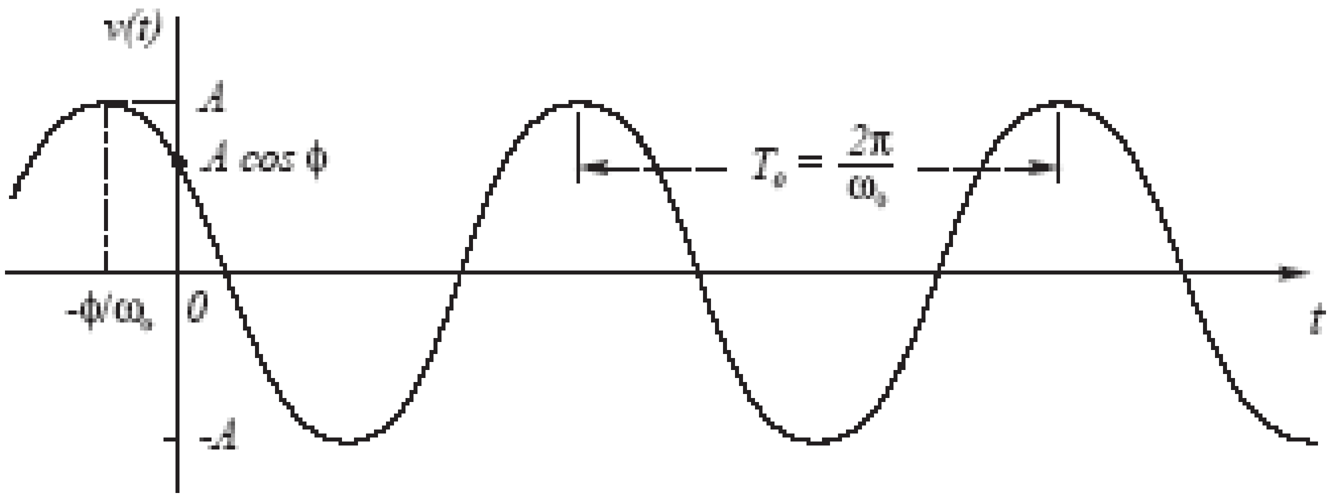
1. Sinusóide

$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

A – valor máximo de amplitude

f_o – frequência fundamental (n.º de períodos por segundo)
$T_o = 1 / f_o$, é o período fundamental

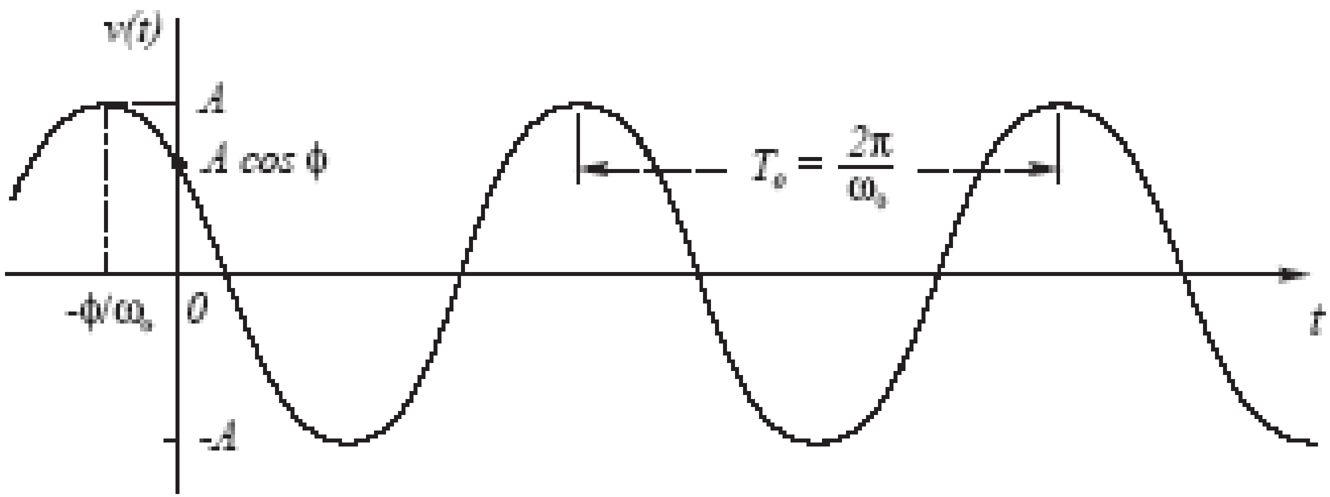
ϕ – fase inicial (deslocamento no eixo dos tempos, em relação à origem)



1. Sinusóide

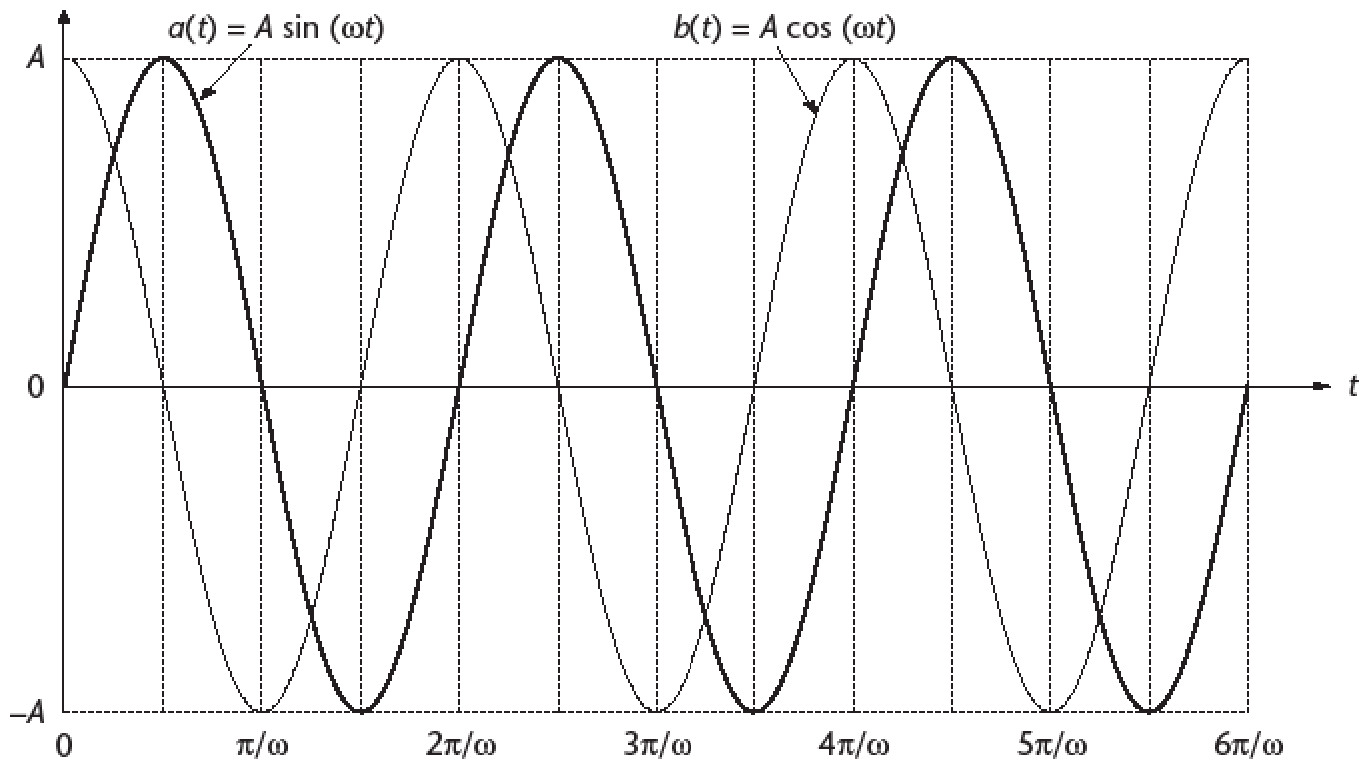
$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- Tem valor médio nulo
- A potência é $P_v = \dfrac{A^2}{2}$
    - apenas depende da amplitude
    - não depende da frequência nem da fase



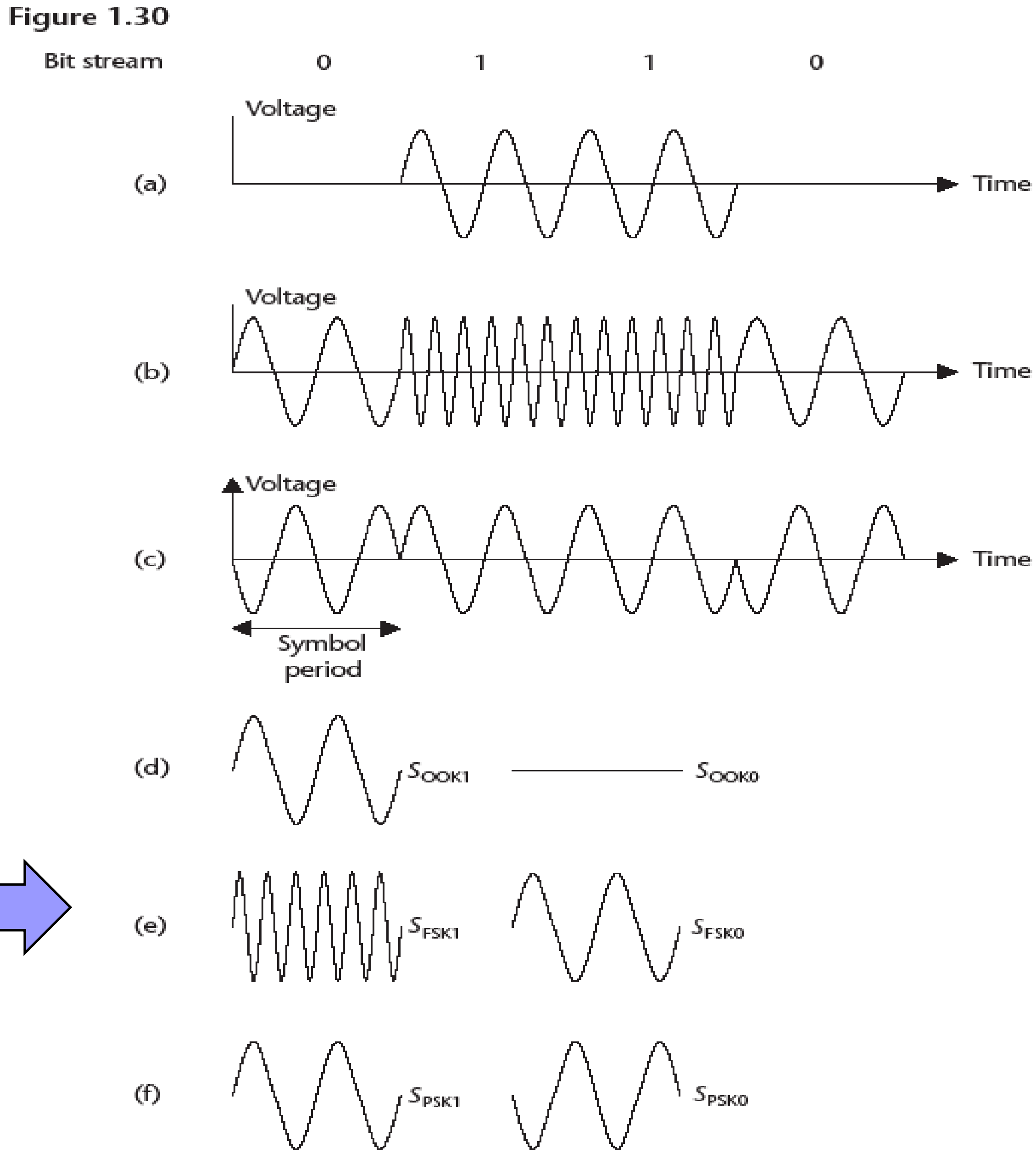
1. Sinusóide

Figure 2.12



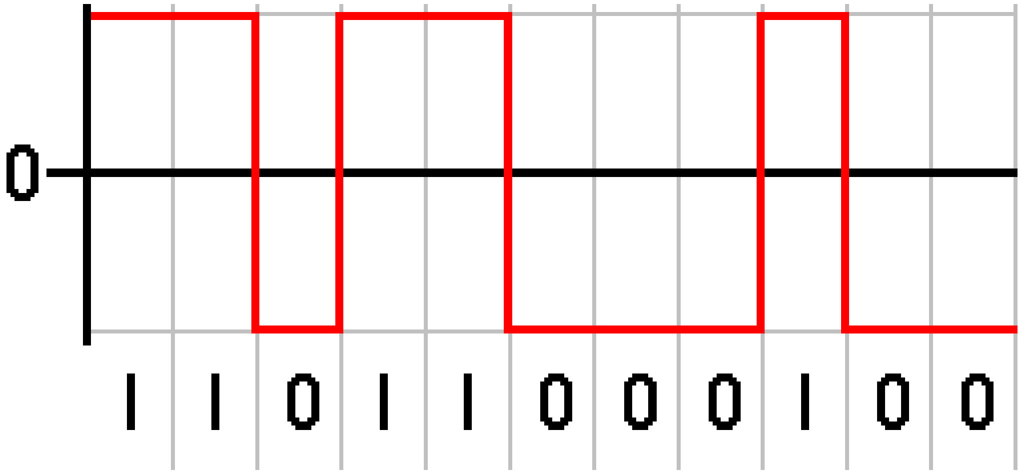
1. Sinusóide

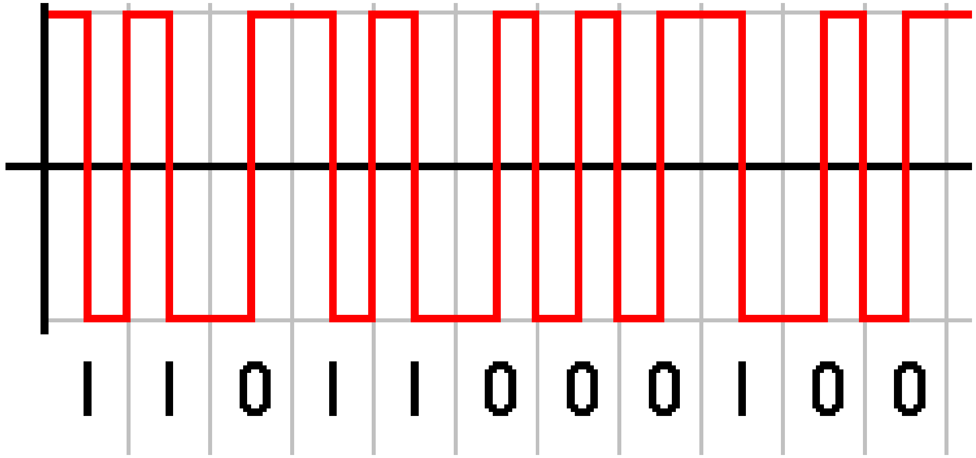
Aplicação nas modulações:
- OOK
- FSK
- PSK



Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

1. A onda quadrada

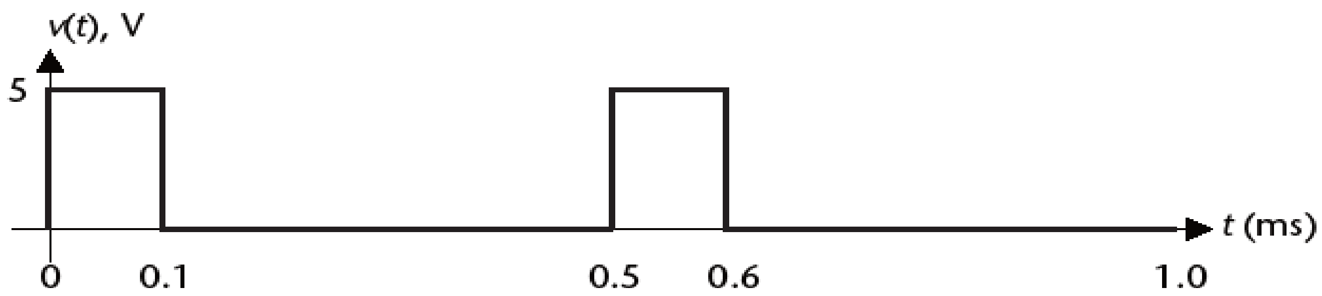




http://en.wikipedia.org/wiki/Manchester_code

1. A onda quadrada

Figure 2.8



2. Espectro de amplitude e de fase

- A sinusóide representada por um fasor (fase + vector)

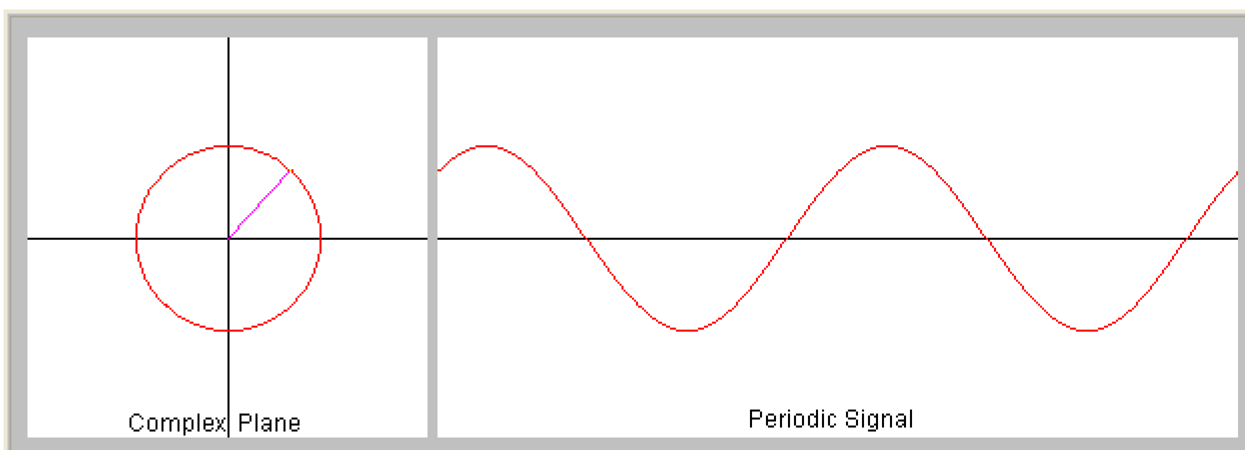
Fórmula de Euler

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \text{ com } j = \sqrt{-1}$$

$$\theta = \omega_0 t + \phi$$

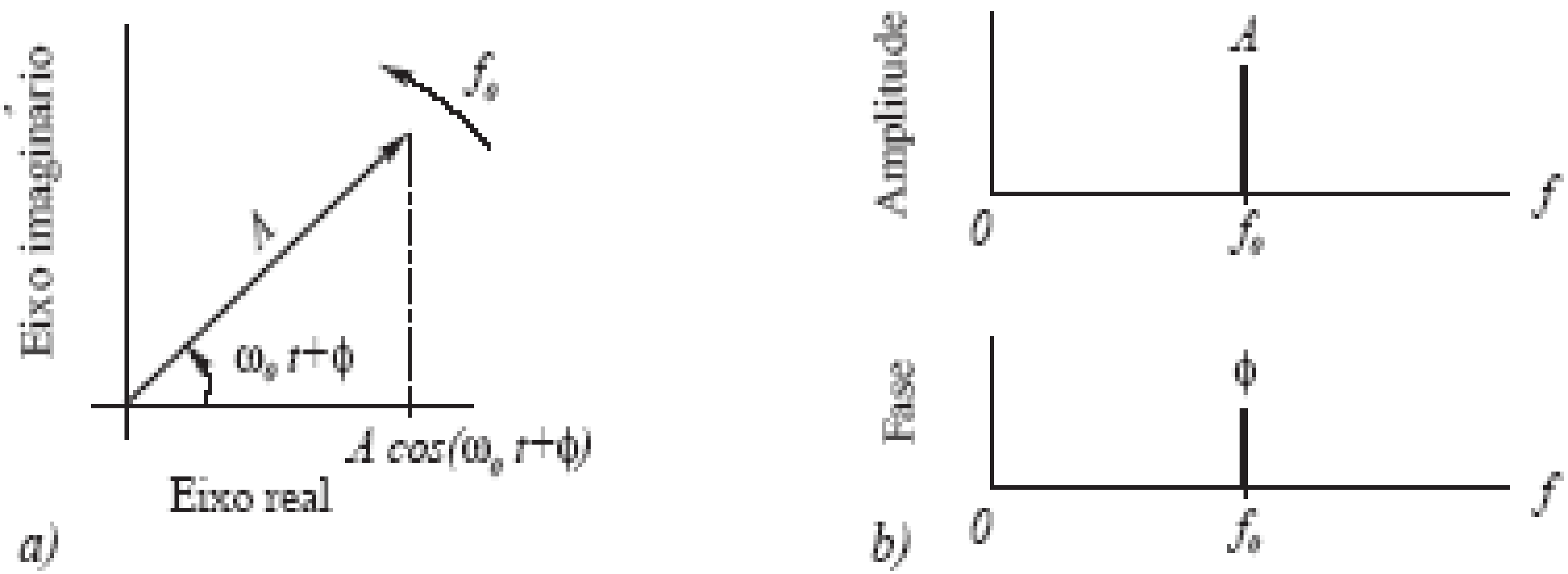
A sinusóide corresponde à real da exponencial complexa

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\Re\left\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\right\} = \Re\left\{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}\right\}$$



http://www.jhu.edu/~signals/phasorlecture2/indexphasorlect2.htm

2. Espectro de amplitude e de fase



- O fasor tem comprimento A
- Roda a f_0 rotações por segundo
- Faz um ângulo de ϕ radianos com o eixo real, para t = 0

- Para descrever o fasor no domínio da frequência precisamos de lhe associar a amplitude e a fase

2. Espectro de amplitude e de fase

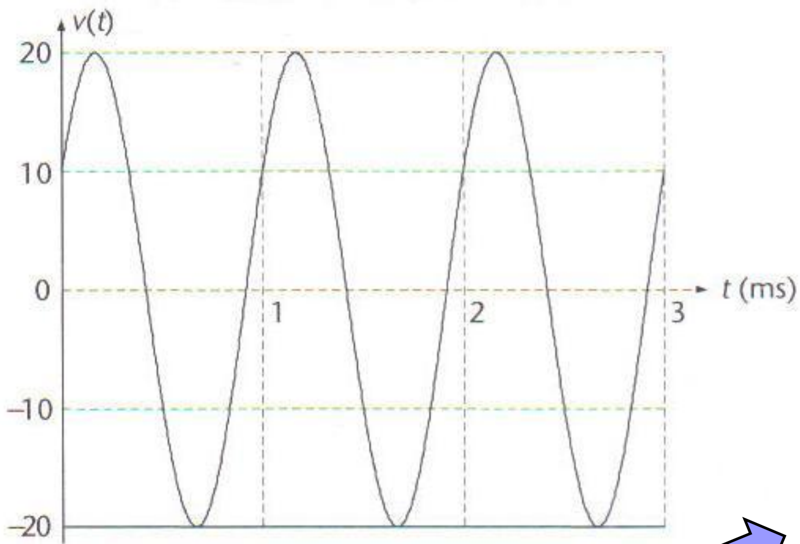
Convenções na representação espectral:

- Variável independente é a frequência *f* em Hz (ciclos/seg)
- *w*=2*pi*f (rad/seg) é a frequência angular
- Os ângulos de fase são medidos relativamente a função co-seno (origem do referencial):
  - sen(ωt) = cos (ωt - 90º) = cos (ωt – π/2)
- A amplitude é sempre positiva. Amplitudes negativas são referidas na fase
  - –A cos(ωt) = A cos (ωt +- 180º) = A cos (ωt +- π)

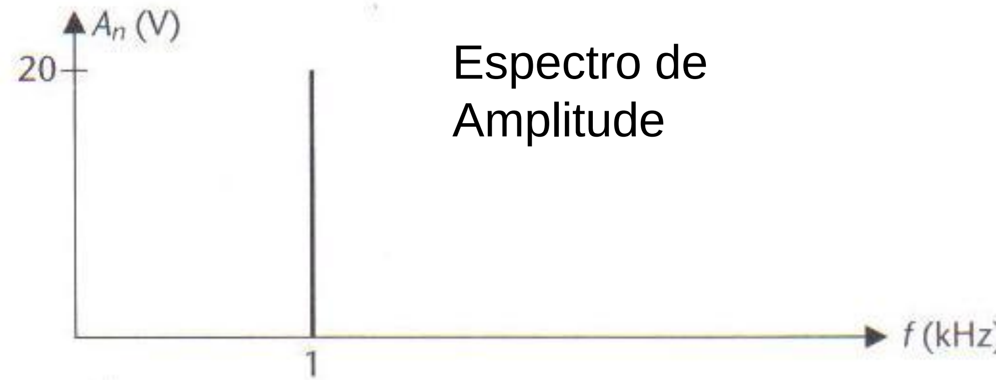
2. Espectro de amplitude e de fase

A sinusóide

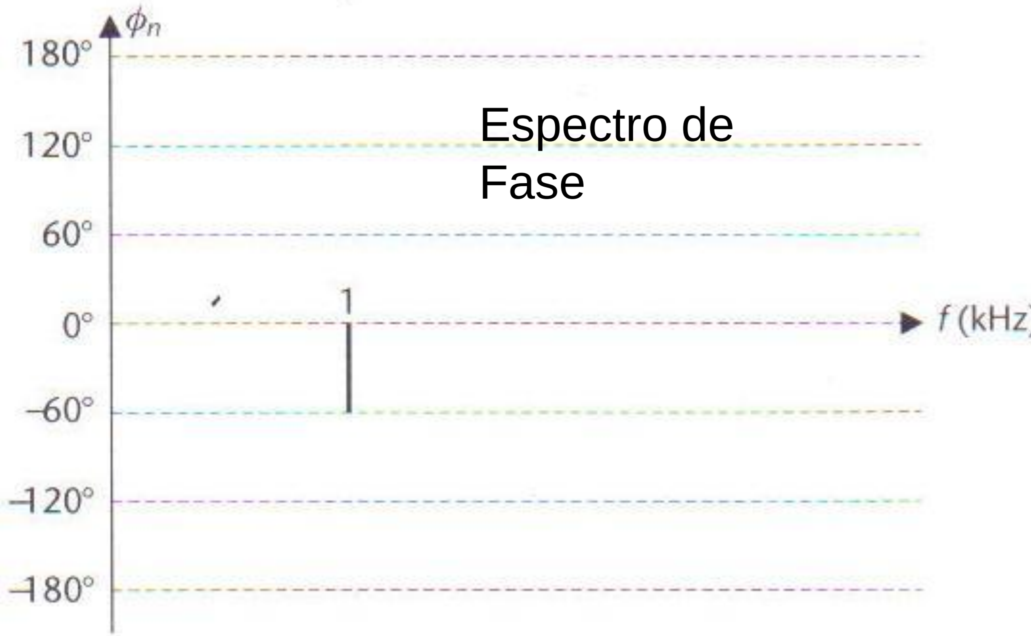
$v(t) = 20 \, cos \, (2\pi \, 1000 \, t - \pi/3)$



$\pi/3$ corresponde a 60º



Espectro de Amplitude

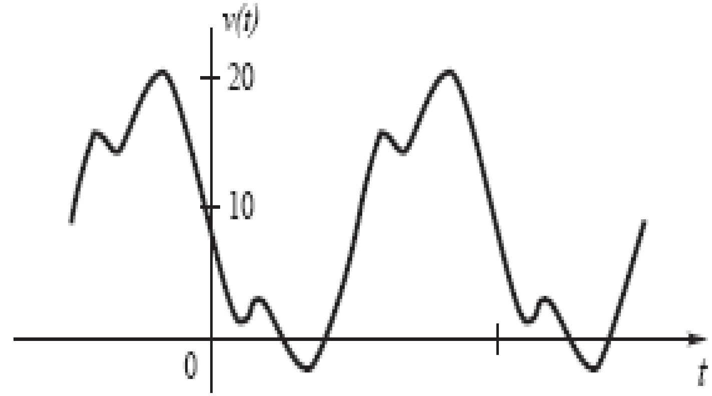


Espectro de Fase

2. Espectro de amplitude e de fase

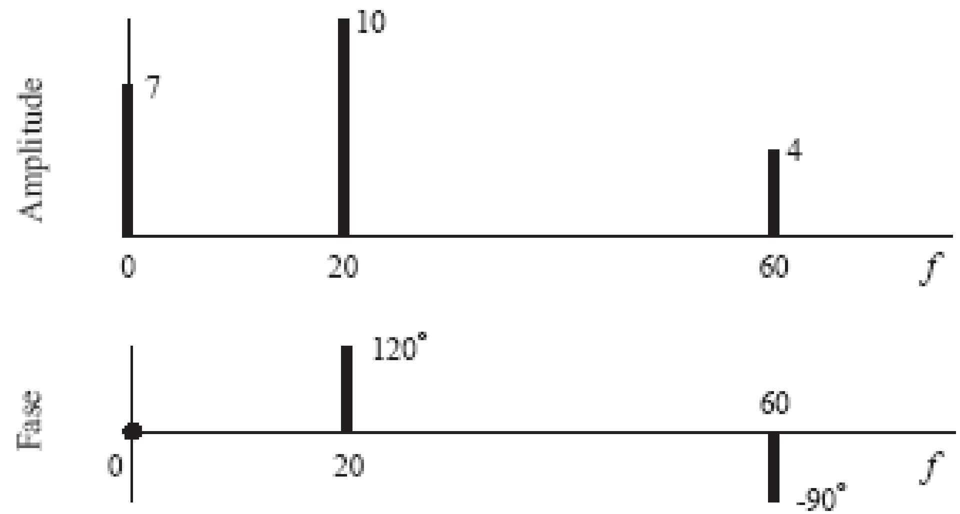
Soma de sinusóides com componente DC não nula

Domínio do tempo



Domínio da frequência:

- Amplitude
- Fase (em graus)



$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\mathrm{sen}(2\pi 60t)$$

2. Espectro de amplitude e de fase

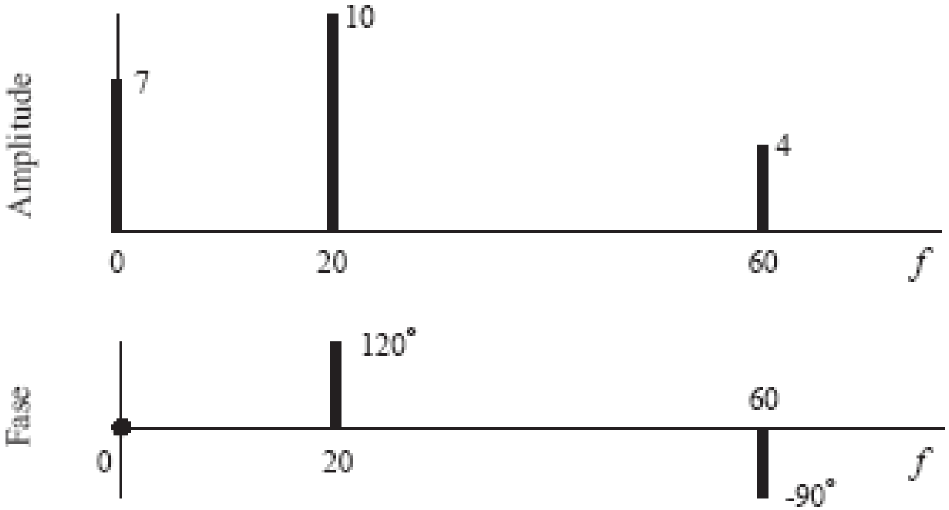
$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\mathrm{sen}(2\pi 60t)$$

$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3} + \pi\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Amplitude sempre positiva

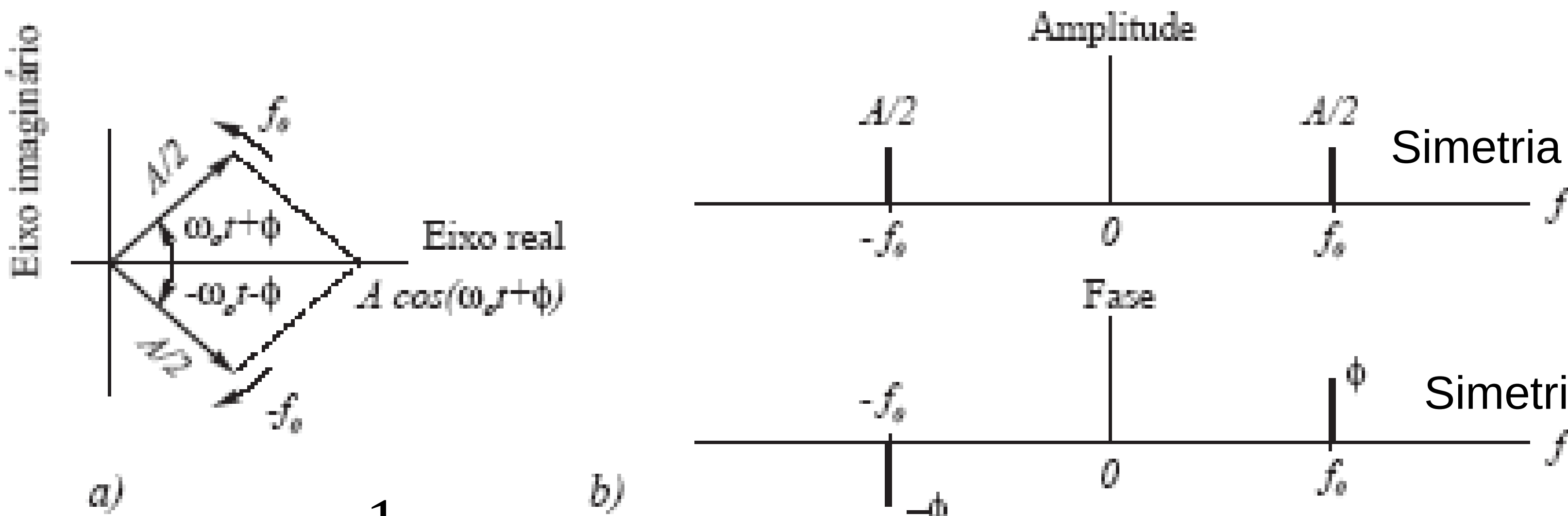
- Co-seno indica a referência de fase



2. Espectro de amplitude e de fase

Fasores Conjugados

Espectro bilateral e frequências “negativas”



Simetria par

Simetria ímpar

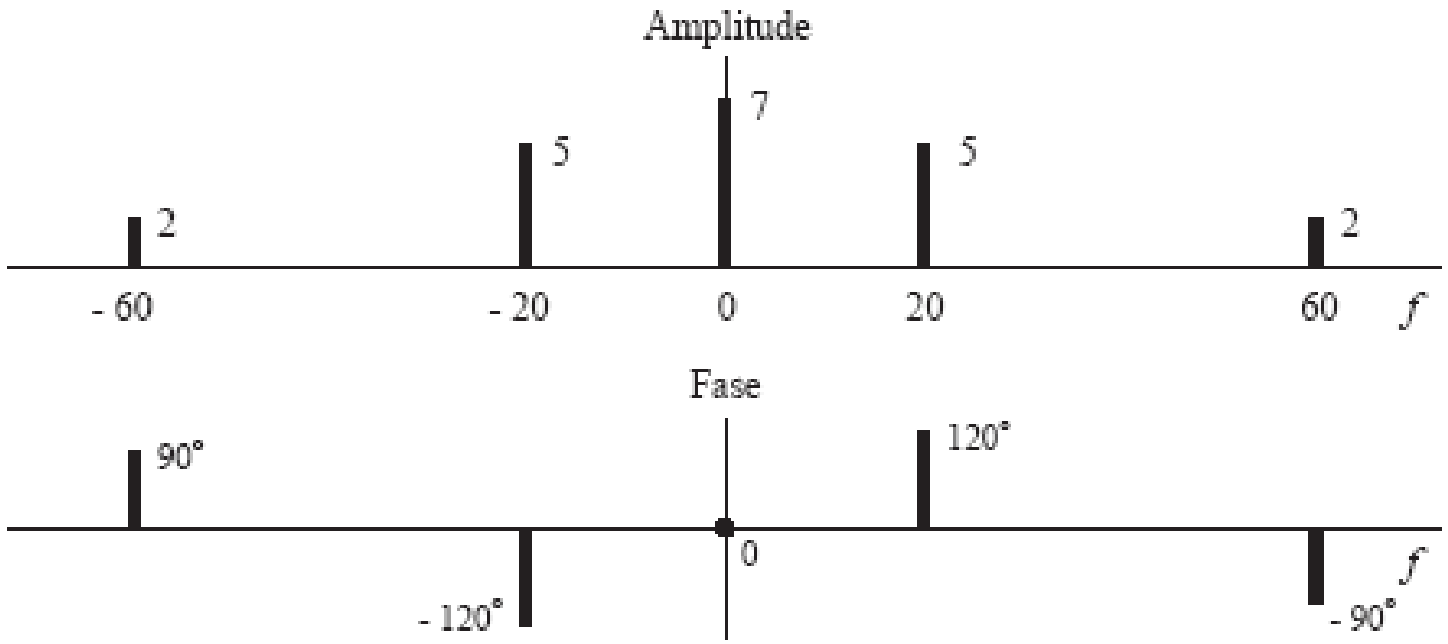
$$\Re\ z = \frac{1}{2}(z+z^*)$$

$$z = Ae^{j2\pi f_o t}e^{j\phi} \quad z^* = Ae^{-j2\pi f_o t}e^{-j\phi}$$

$$A\cos(2\pi f_o t+\phi) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_o t}e^{j\phi} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_o t}e^{-j\phi}$$

2. Espectro de amplitude e de fase

Versão bilateral do espectro



$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\operatorname{sen}(2\pi 60t)$$

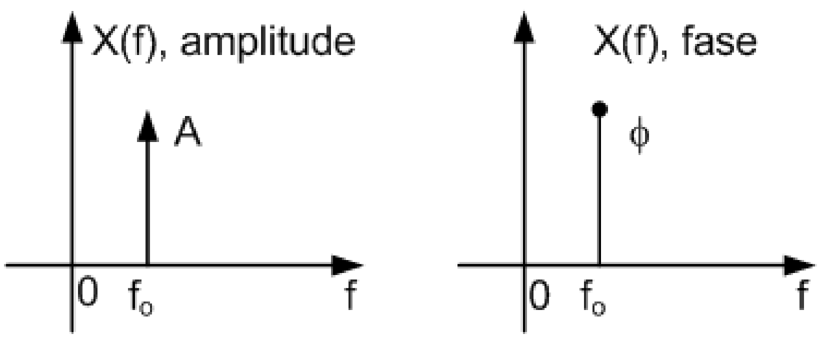
$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Espectro de amplitude e de fase

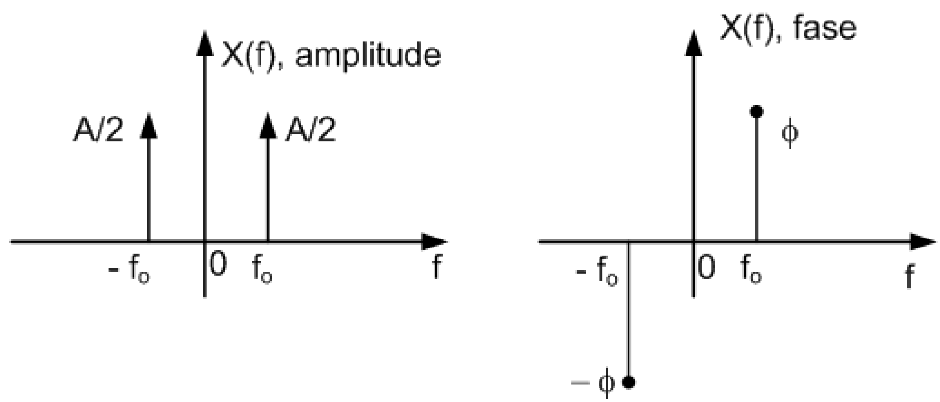
Domínio do Tempo

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(2\pi f_o t + \phi) \\
&= \frac{A}{2}\cos(2\pi f_o t + \phi) + \frac{A}{2}\cos(-(2\pi f_o t + \phi)) \\
&= \frac{A}{2}\cos(2\pi f_o t + \phi) + \frac{A}{2}\cos(2\pi(-f_o)t - \phi))
\end{aligned}
$$

Espectro Unilateral



Espectro Bilateral



2. Espectro de amplitude e fase

- Constituem representações gráficas de sinusóides no domínio da frequência
- Uma linha no espectro unilateral representa uma sinusóide
- Essa mesma sinusóide é representada por duas linhas no espectro bilateral
- O espectro de amplitude fornece indica a distribuição de potência pelas frequências
- O espectro de fase indica o desfasamento de cada componente de frequência (desvio para t=0)

3. Série de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768 – 1830)

Qualquer função ou forma de onda periódica pode ser expressa pela soma de sinusóides com frequências múltiplas inteiras (designadas **harmónicas**) da frequência fundamental, e com as amplitudes e fases apropriadas

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_o t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi 2 f_o t + \phi_2) + \ldots$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$$

3. Série de Fourier

Espectro Unilateral

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$$

Espectro Bilateral

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_o t + \Phi_k)$$

$$A_k = \begin{cases} a_k, k = 0 \\ \dfrac{a_k}{2}, k > 0 \end{cases}$$

$$A_{-k} = A_k, k \neq 0$$

$$\Phi_k = \phi_k, k \geq 0$$

$$\Phi_{-k} = -\Phi_k, k \neq 0$$

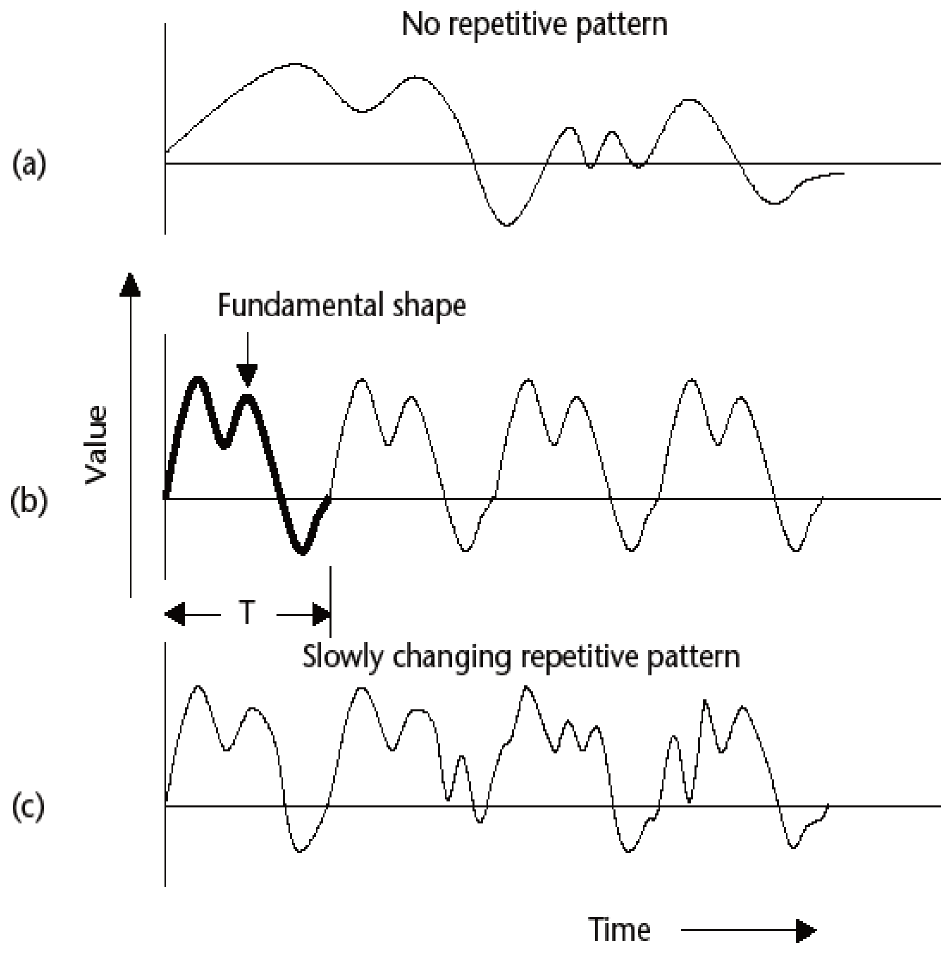
3. Série de Fourier

Frequência fundamental fo é aquela à qual o sinal se repete

$T_o = 1 / f_o$

O período fundamental To é o mínimo múltiplo comum dos períodos das várias componentes de frequência $T_o = \text{mmc}(T_1, T_2, \ldots)$

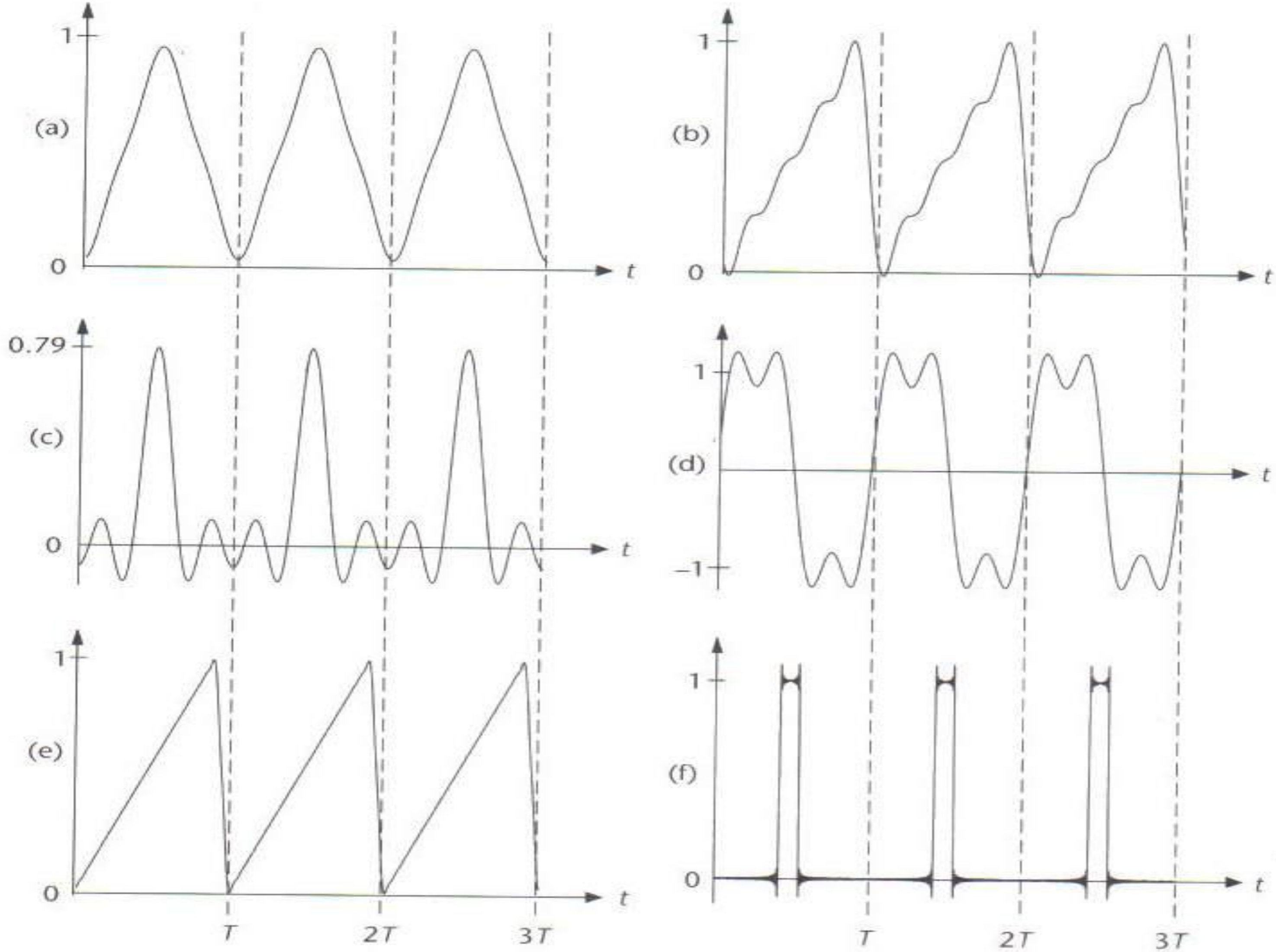
Figure 2.6



Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

3. Série de Fourier

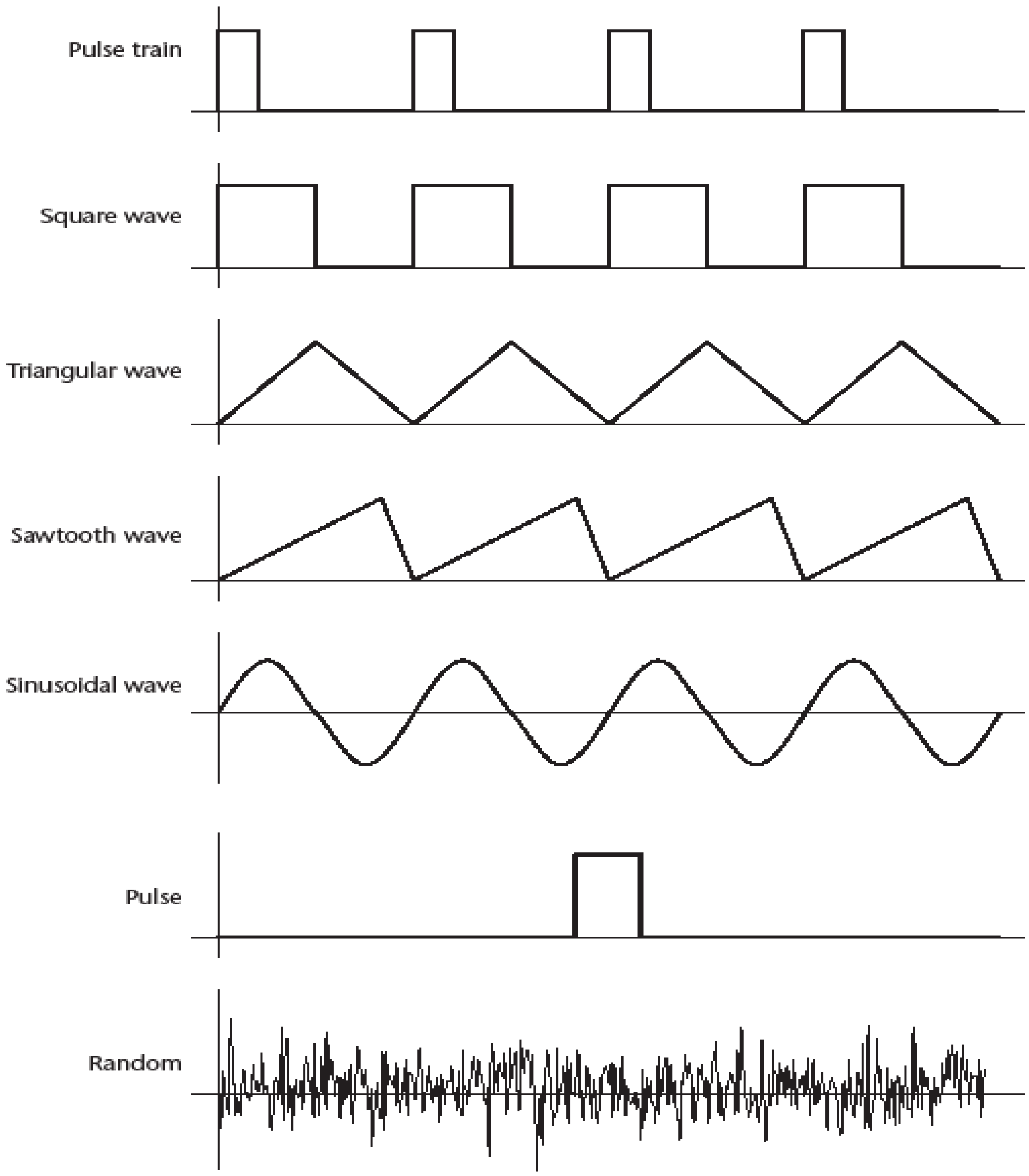
Síntese de sinais periódicos através da soma de sinusóides



3. Série de Fourier

Soma de sinusóides

Figure 2.7



Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

3. Série de Fourier

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_o t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi 2 f_o t + \phi_2) + \ldots$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$$

- x(t) é sinal periódico real com frequência fundamental f_o
- Espectro de amplitude é dado pelos coeficientes a_k
- Espectro de fase é definido pelos coeficientes ϕ_k

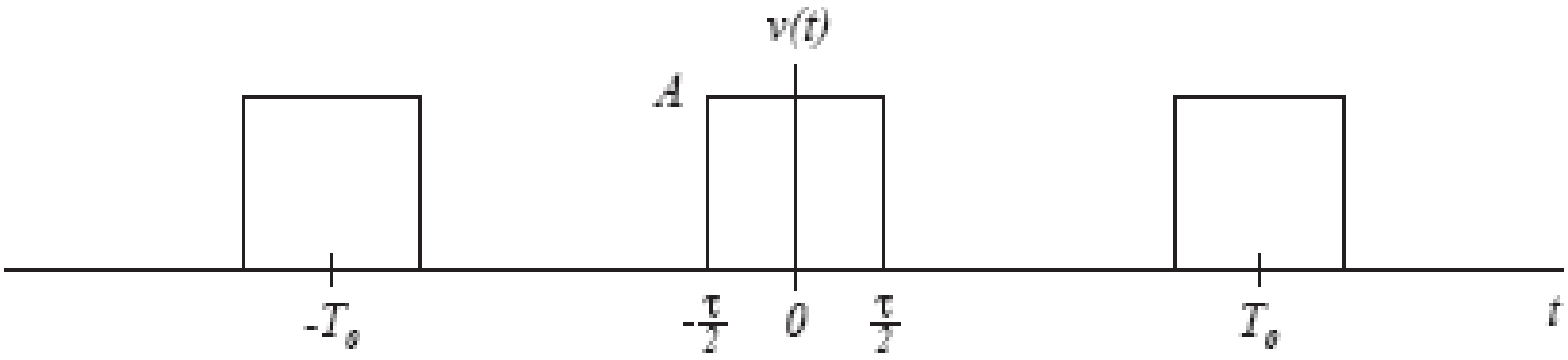
- a_0 é o valor médio do sinal (componente DC)
- kf_o são as componentes harmónicas do sinal
- f_o é a primeira harmónica

3. Série de Fourier

Sequência de pulsos rectangulares (onda quadrada)

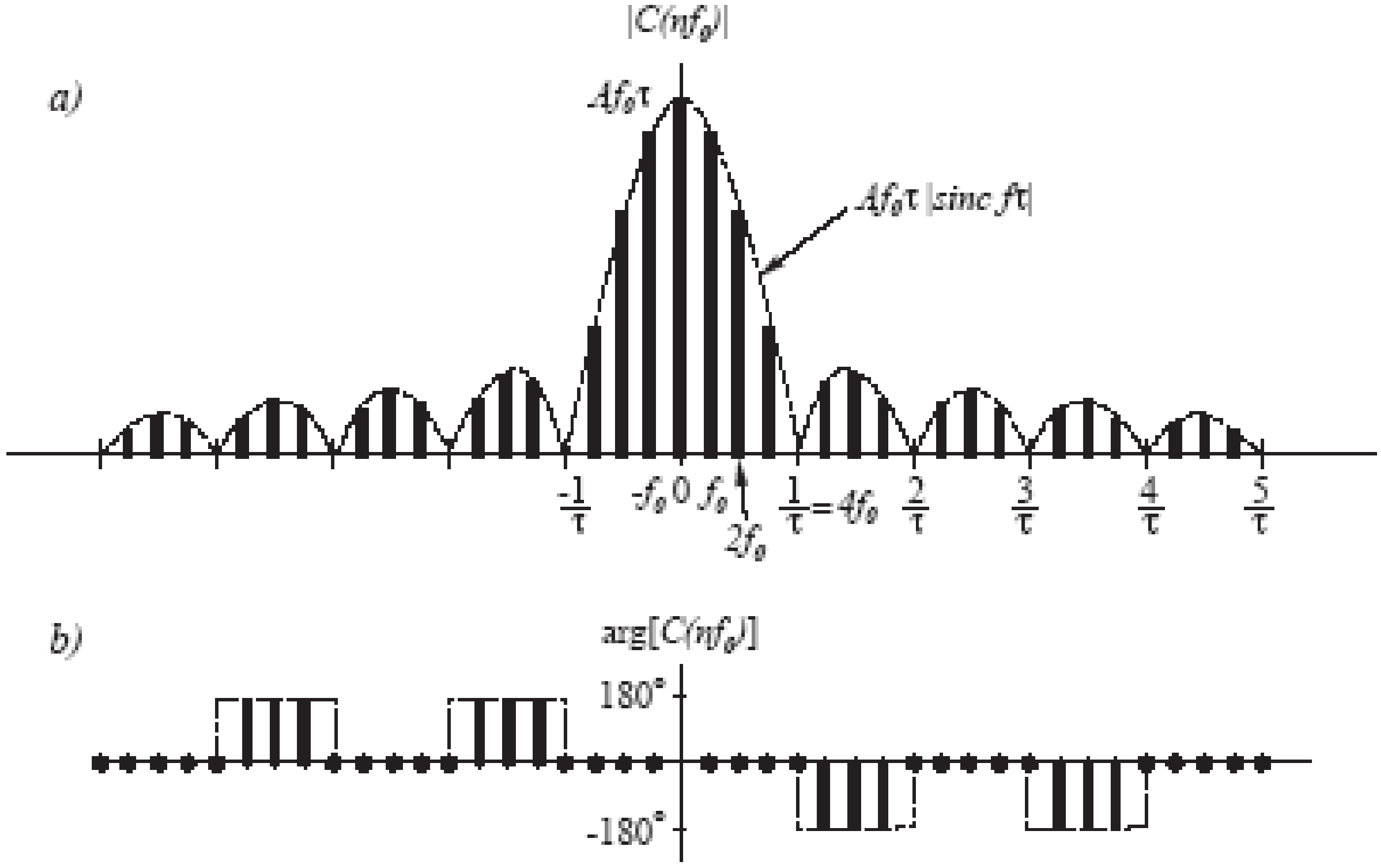
Sinal periódico de potência

Síntese à custa de sinusóides



3. Série de Fourier

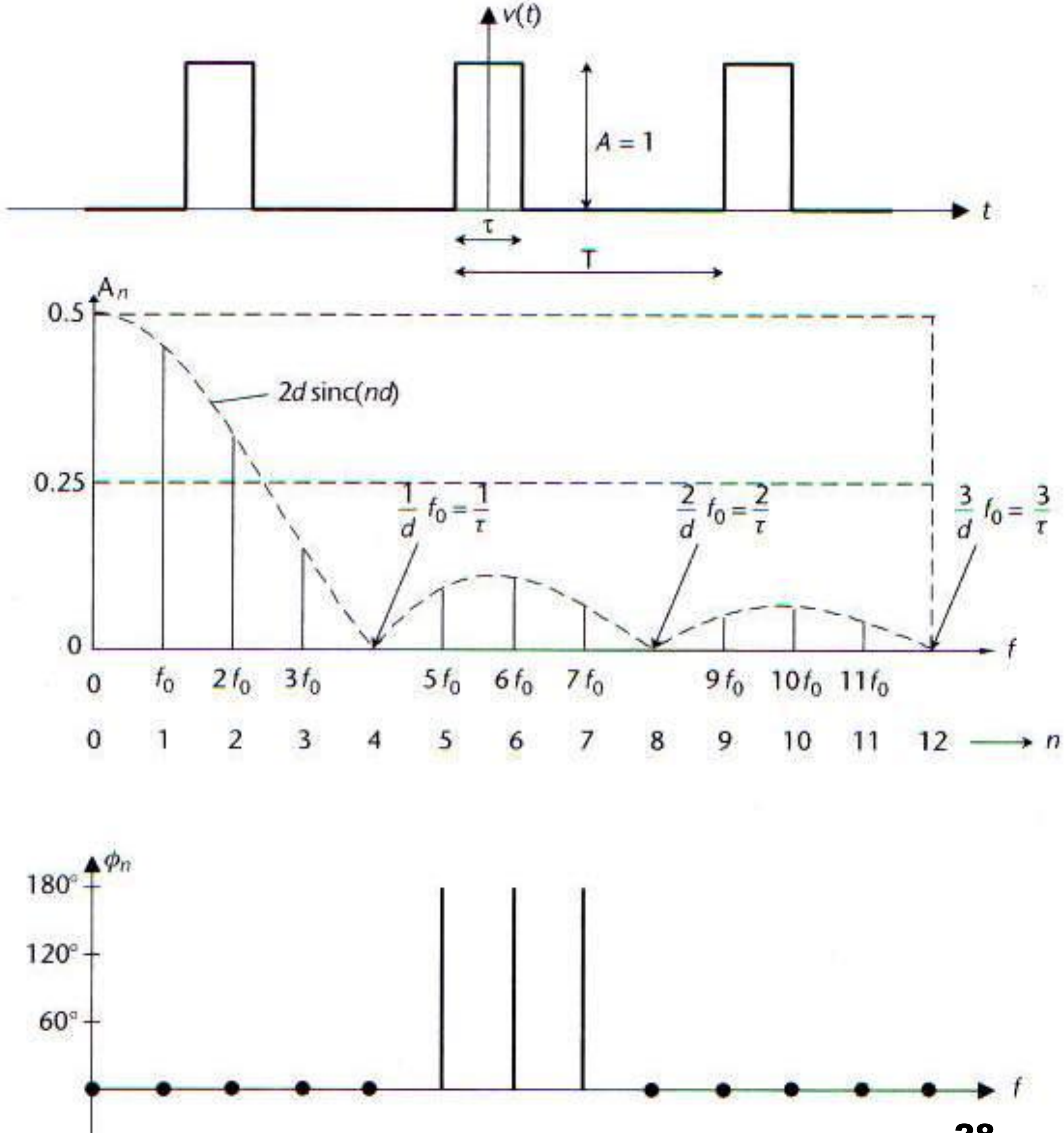
Espectro da sequência de pulsos rectangulares



3. Série de Fourier

Espectro da onda quadrada

Amplitude unitária
Duty cycle d =1/4



3. Série de Fourier

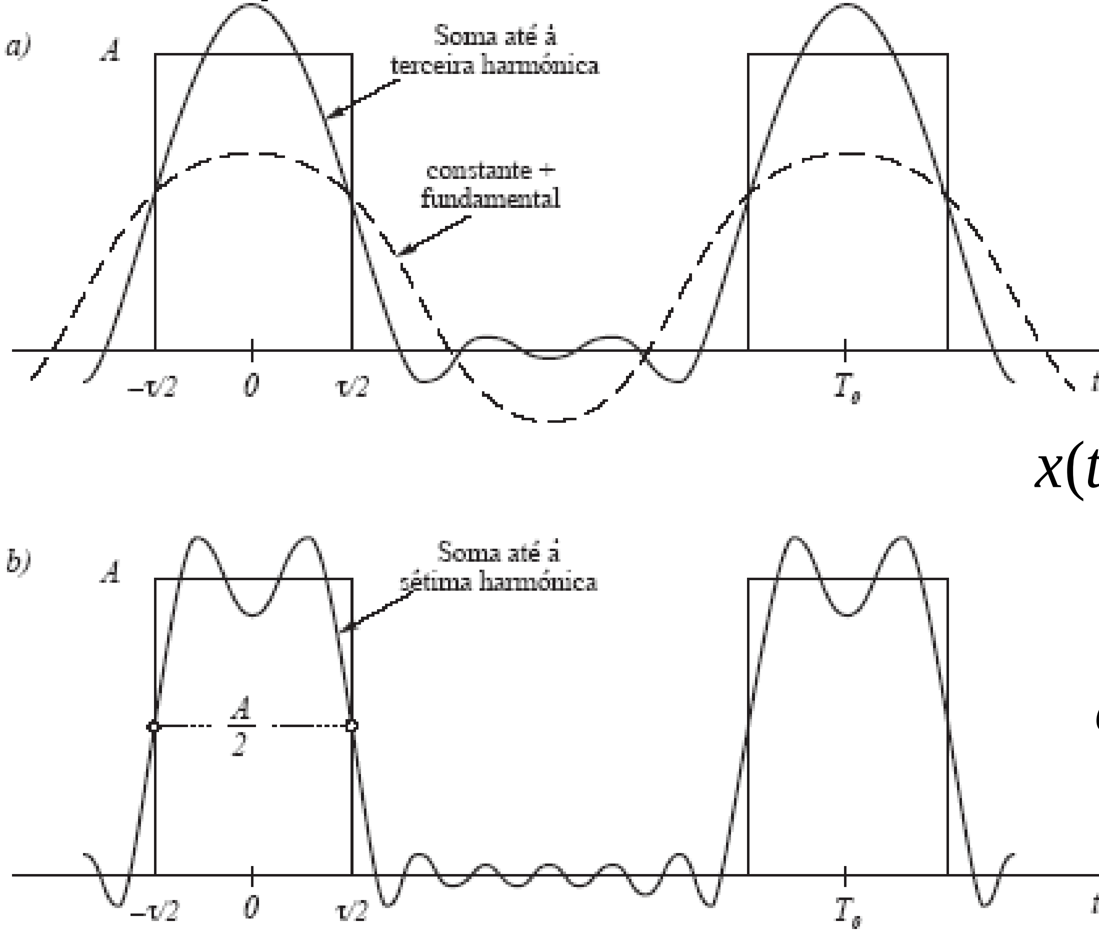
Espectro da onda quadrada (amplitude unitária)

- As linhas do espectro ocorrem às frequências múltiplas de f_0
- Na frequência 0 temos a componente DC do sinal
- f_0 é a frequência fundamental
- kf_0 são as harmónicas
- d é o *duty cycle*
- A amplitude das harmónicas é dada por

  $a_k = 2d\ \mathrm{sinc}(kd)$

3. Série de Fourier

Onda quadrada: soma de sinusóides



$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$$

$$a_k = \begin{cases} Ad, & k = 0 \\ 2Ad\,\mathrm{sinc}(kd), & k > 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = 0$$

Nota: nesta representação a_k toma valores negativos

4. Cálculos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k) \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_o t + \Phi_k)$$

A <u>potência</u> é calculada a partir do espectro de amplitude, recorrendo ao <u>Teorema de Parseval</u>

$$P_x = a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{2}$$

Espectro Unilateral

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^2$$

Espectro Bilateral

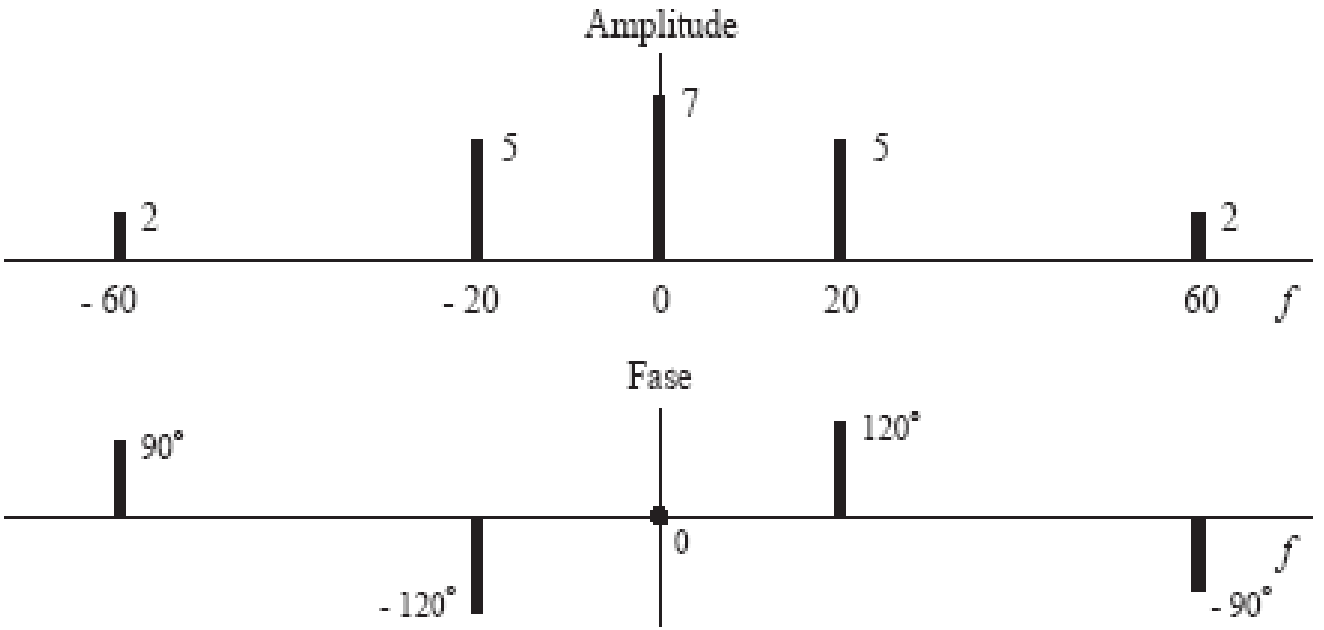
O <u>valor médio</u> (ou componente DC) é dado pelo coeficiente $a_0 = A_0$ (contribuição da frequência 0)

4. Cálculos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$$

A <u>largura de banda</u> (LB) é definida como a largura da faixa de frequências ocupada pelo sinal

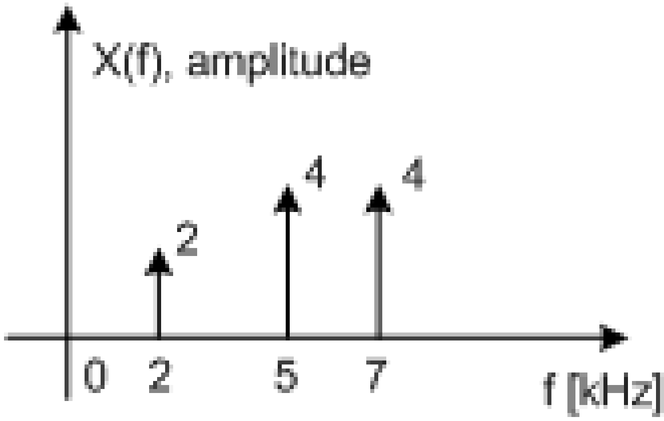
Frequências “negativas” não são consideradas



LB=60 Hz

5. Exercícios

A figura apresenta o espectro unilateral de amplitude do sinal x(t).



a) Apresente o respectivo espectro bilateral de amplitude

b) Indique a potência, a largura de banda, a frequência fundamental e o valor médio do sinal

c) Seja y(t)= 3 - x(4t) + 2x(t). Esboce os espectros unilaterais de amplitude e fase de y(t)

5. Exercícios

Considere o sinal periódico x(t), de frequência fundamental 10 kHz, definido por

$$x(t) = 5 + \cos(2\pi f_o t + \pi/4) + 5\cos(2\pi 3 f_o t - \pi/3)$$

a) Esboce os espectros unilaterais de amplitude e de fase de x(t).
b) Indique a largura de banda do sinal e a percentagem de potência contida na banda de 0 a 15 kHz.

Sejam

$$z(t) = -3 + 2\cos(2\pi 10 t) \text{ e } w(t) = -1 + 5\,\mathrm{sen}(2\pi 20 t - \pi/2) + z(t).$$

a) Esboce o sinal z(t)
b) Calcule Ez, mz e Pw
c) Esboce os espectros dos sinais z(t) e w(t).

6. Outras Aplicações

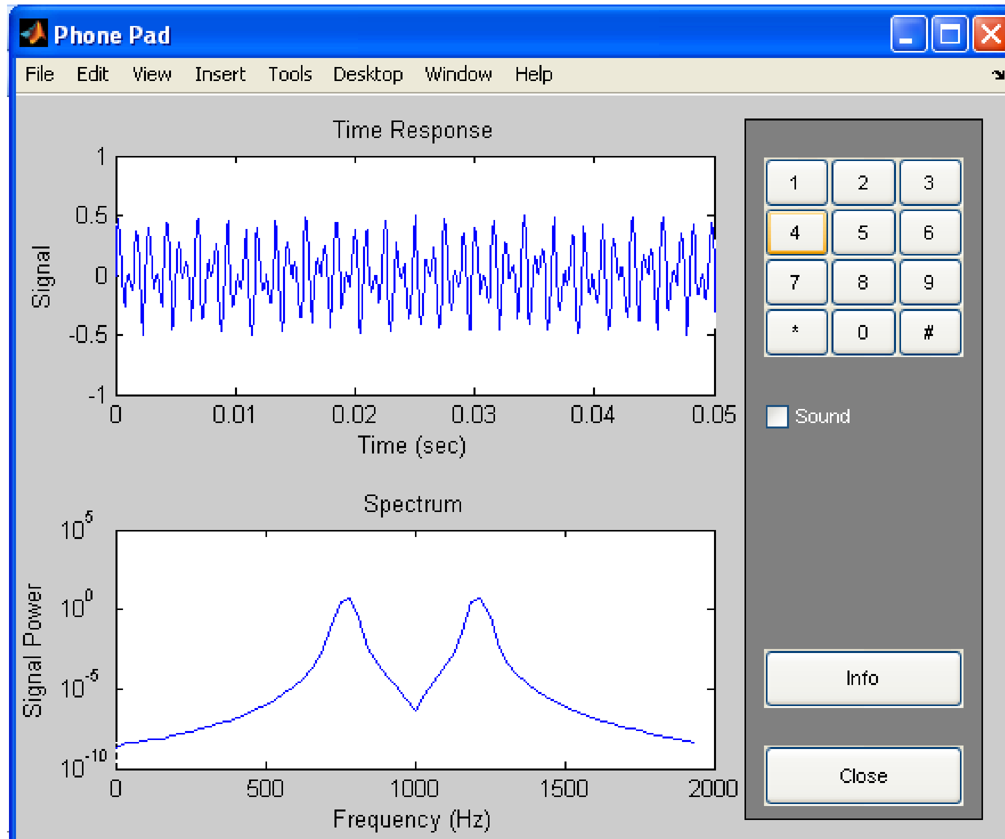
- DTMF – *Dual Tone MultiFrequency*
- Cada tecla corresponde à soma de duas sinusóides
- Tabela com pares de frequências utilizadas

Hz	1209	1336	1477	1633
697	1	2	3	A
770	4	5	6	B
852	7	8	9	C
941	*	0	#	D

6. Outras Aplicações

Marcação telefónica

DTMF
Dual-Tone
Multifrequency



Demonstração Matlab - phone

6. Outras Aplicações

Notas musicais = Sinusóides organizadas em frequência (escalas) Figure 2.5

Uma oitava = duplicação de frequência