I-7 Digitalização e Reconstrução

Comunicações

(23 Abril 2009)

Sumário

1. Teorema da Amostragem
    1. Ritmo de Nyquist

2. Amostragem Ideal e Natural (análise no tempo e na frequência)
    1. Sinais Passa Baixo
    2. Sinais Passa Banda
    3. Reconstrução

3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

4. Quantificação (uniforme)
    1. Relação sinal/ruído de quantificação

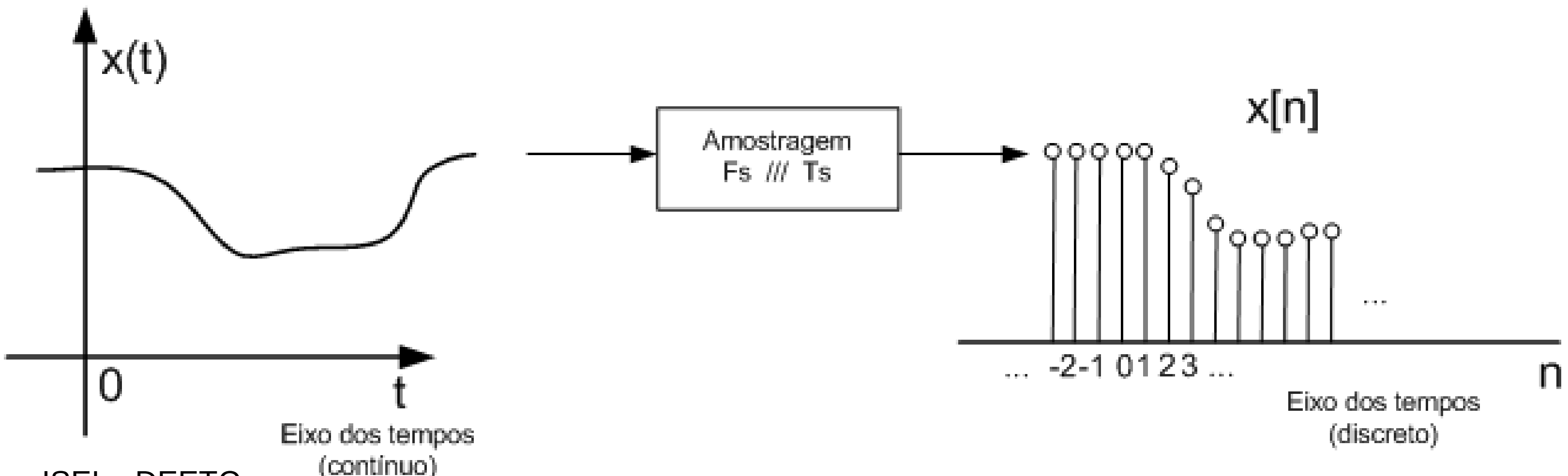
1. Teorema da Amostragem

- Um sinal de banda limitada ("passa baixo") que não tenha componentes espectrais com frequências superiores a $\mathbf{f_m}$ (Hz) pode ser amostrado e perfeitamente reconstruído, usando um filtro passa baixo, a partir de amostras obtidas em intervalos regulares com frequência $\mathbf{f_s > 2 \times f_m}$ (amostras por segundo ou Hz)

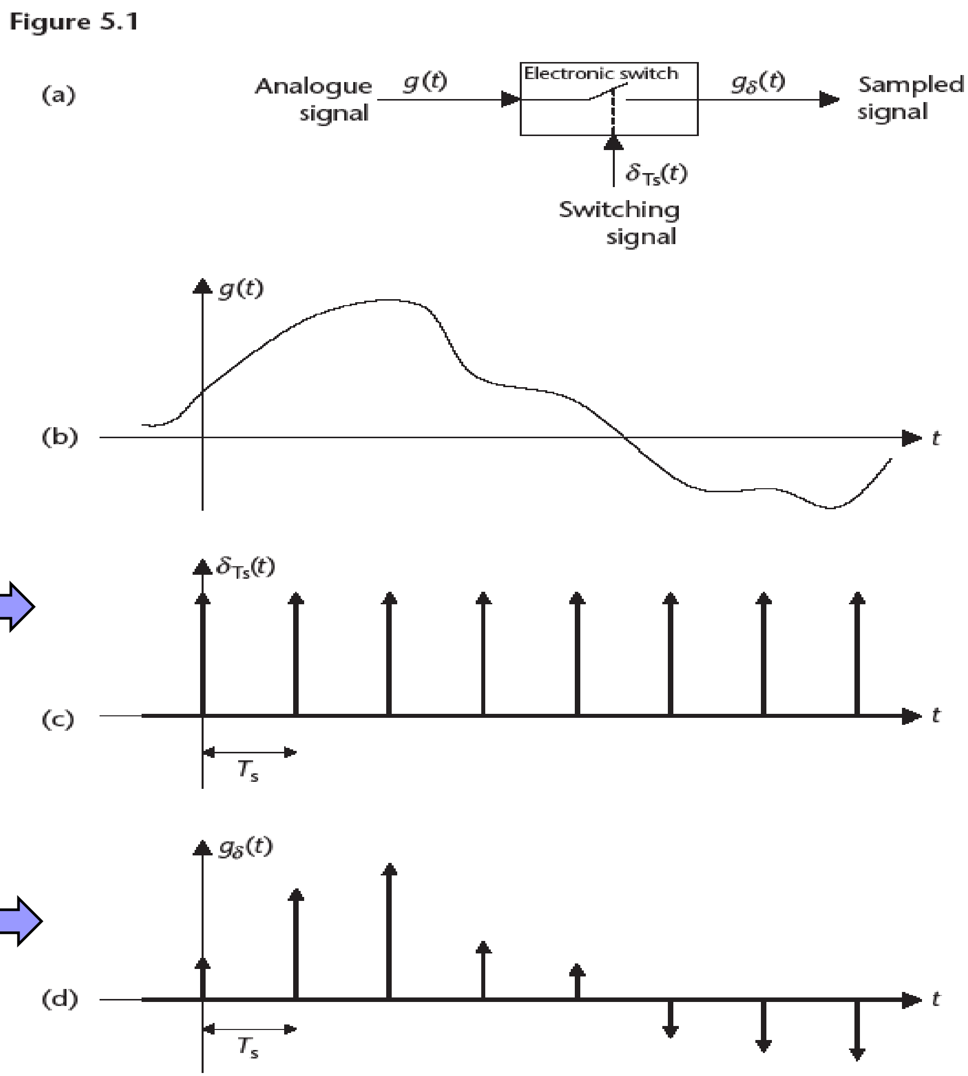
- Ritmo de Nyquist: $\mathbf{f_s > 2 \times f_m}$

1. Teorema da Amostragem

- Sinal discreto é uma função real de variável inteira relativa
- O eixo dos tempos é discreto $$x[n]: Z_0 \rightarrow \Re$$
- Os valores de amplitude de x[n] são obtidos por amostragem ao ritmo Fs (*frequency of sampling*), ou seja, a cada Ts (*time of sampling*) é obtida nova amostra
- Amostra x[1] corresponde a x(Ts); amostra x[2] corresponde a x(2Ts)...



2. Amostragem Ideal (Tempo)

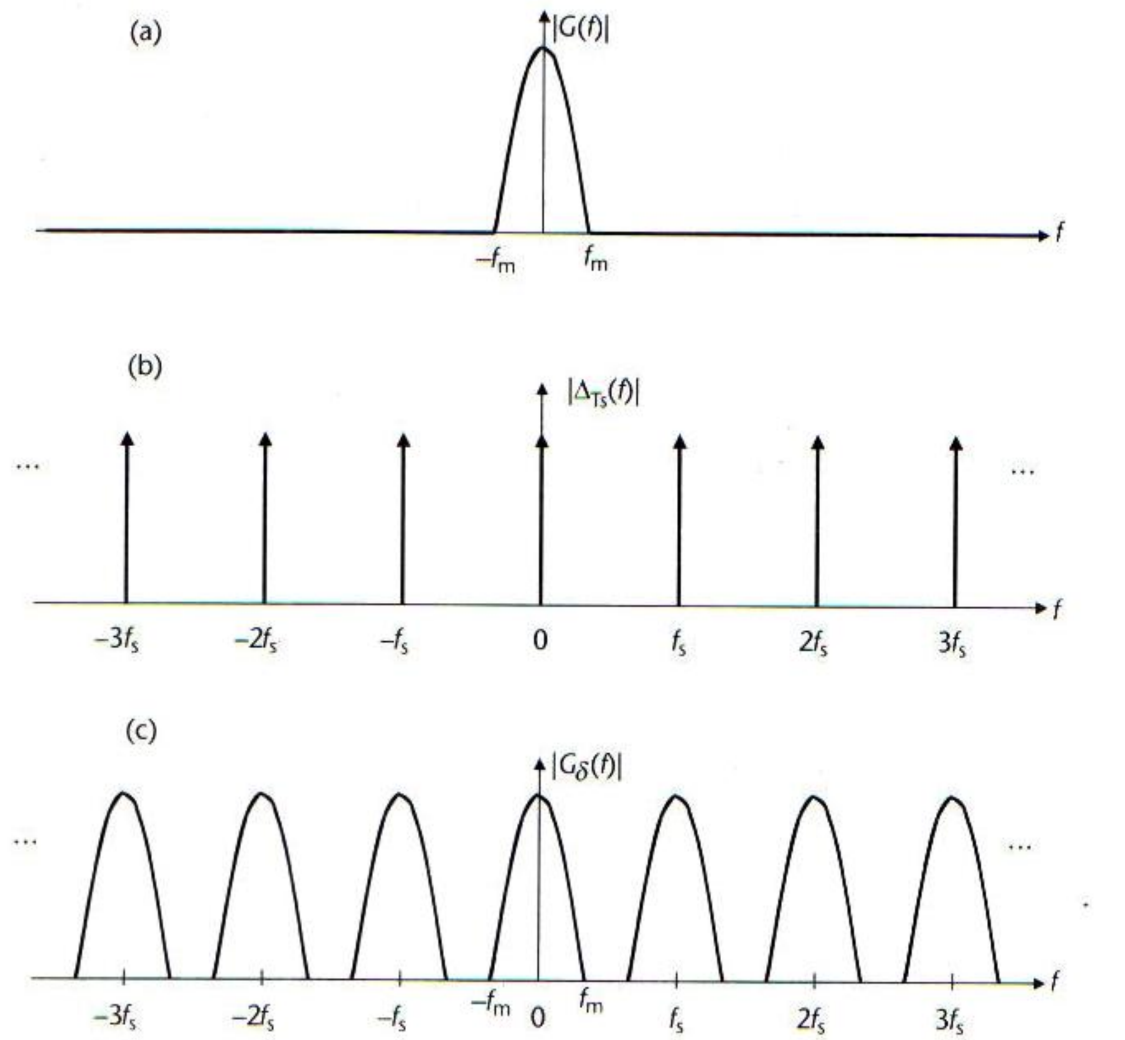


Sinal Amostrador Ideal

Sinal Amostrado (Discreto)

Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

2. Amostragem Ideal (Frequência)



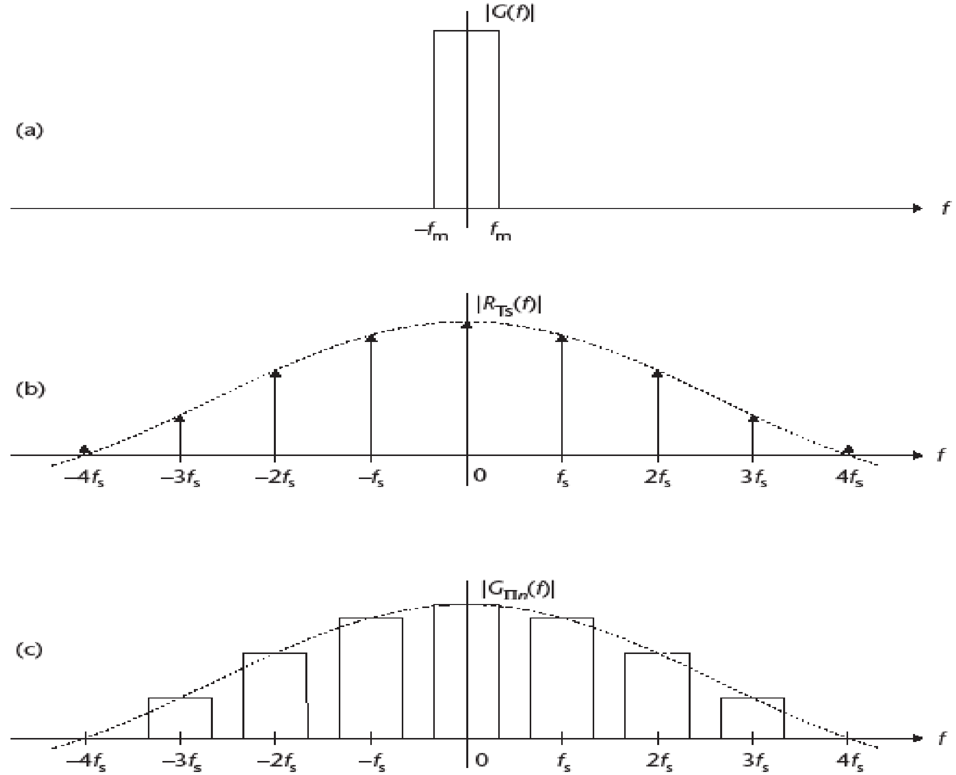
Sinal Amostrador Ideal

Espectro do Sinal Amostrado

Réplicas Espectrais

2. Amostragem Natural (Frequência)

Figure 5.14



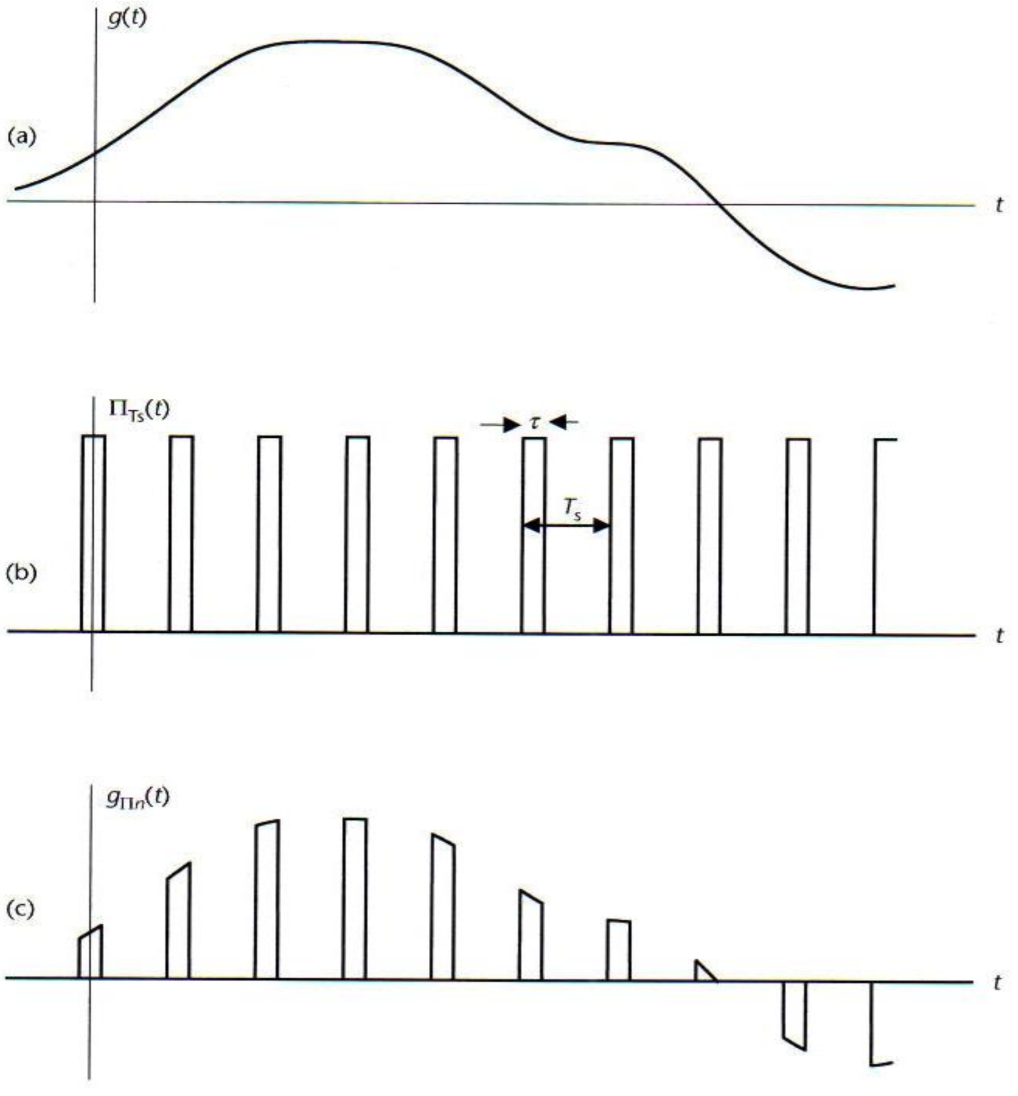
Espectro do Sinal
Amostrador
Real

Onda quadrada com *duty cycle* a tender para zero

A envolvente do espectro é uma função sinc

Atenuação nas
réplicas espectrais

2. Amostragem Natural (Tempo)

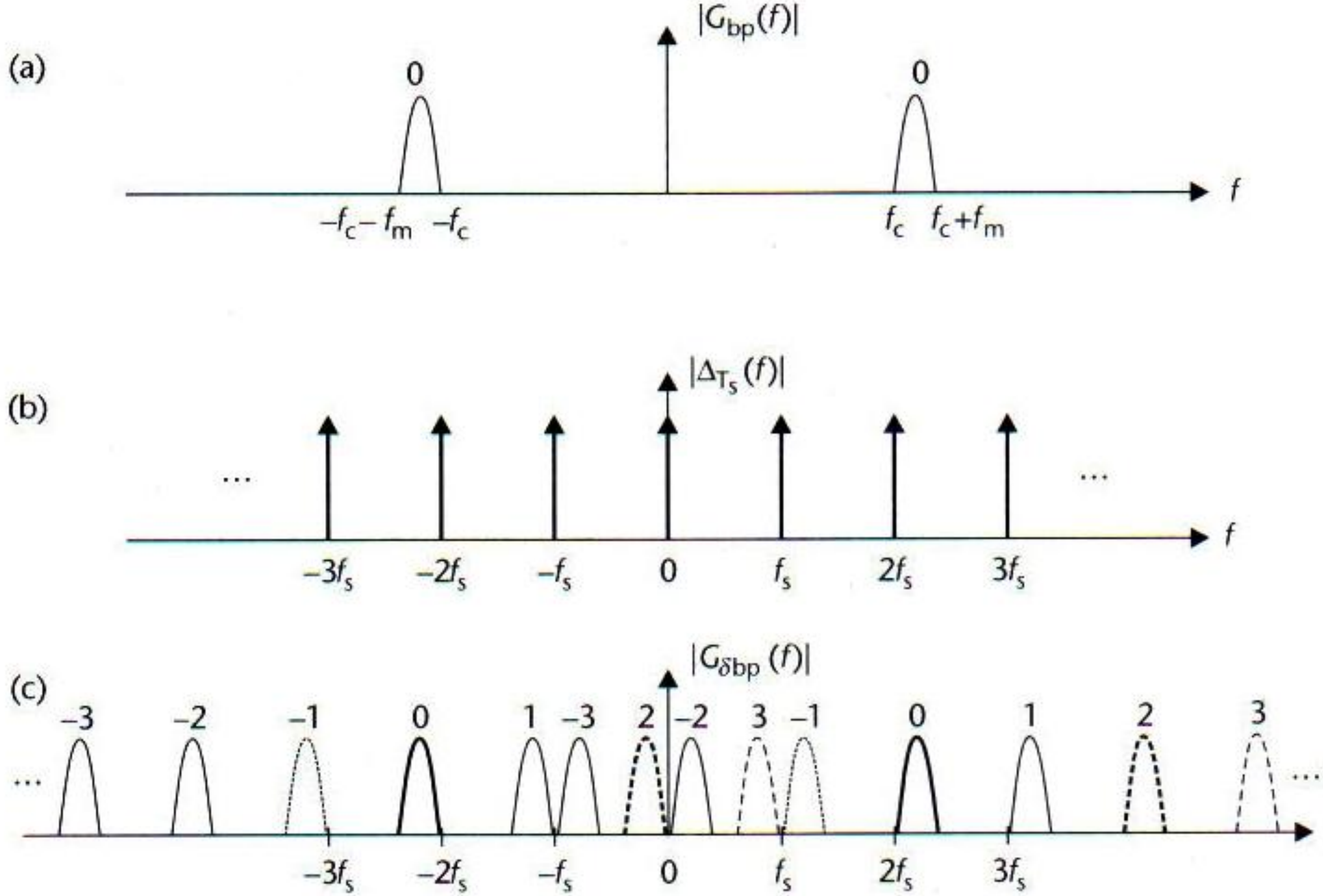


Sinal Amostrador Real

Onda quadrada com *duty cycle* a tender para zero

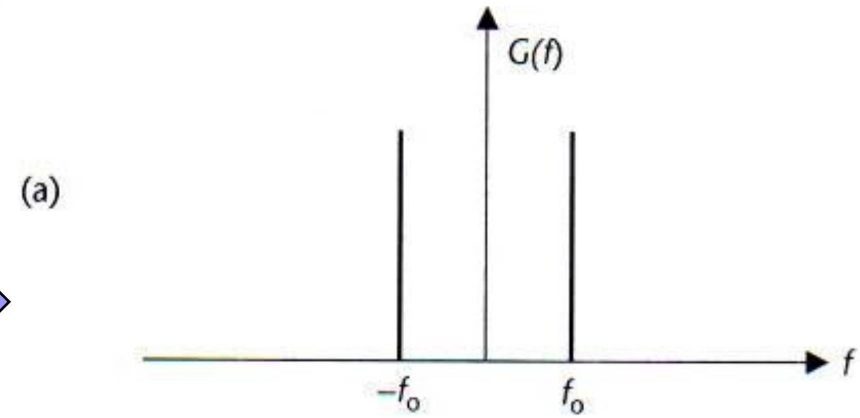
Sinal Amostrado

2. Amostragem Ideal de Sinal Passa-Banda (Frequência)

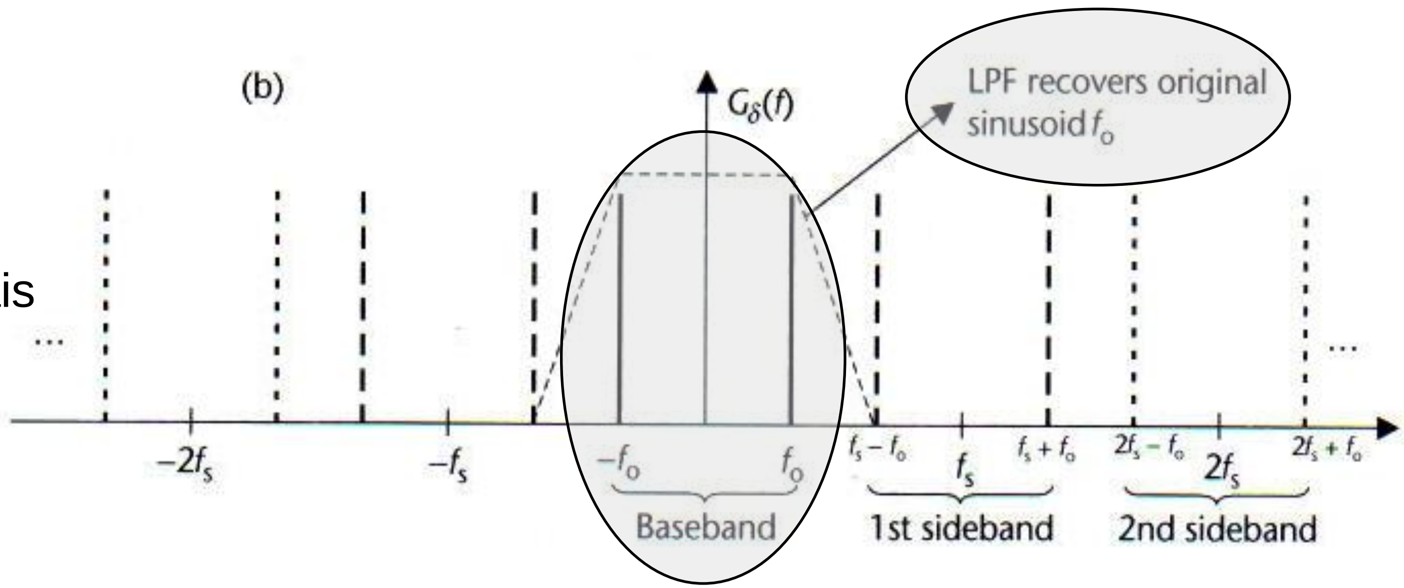


2. Amostragem da sinusóide

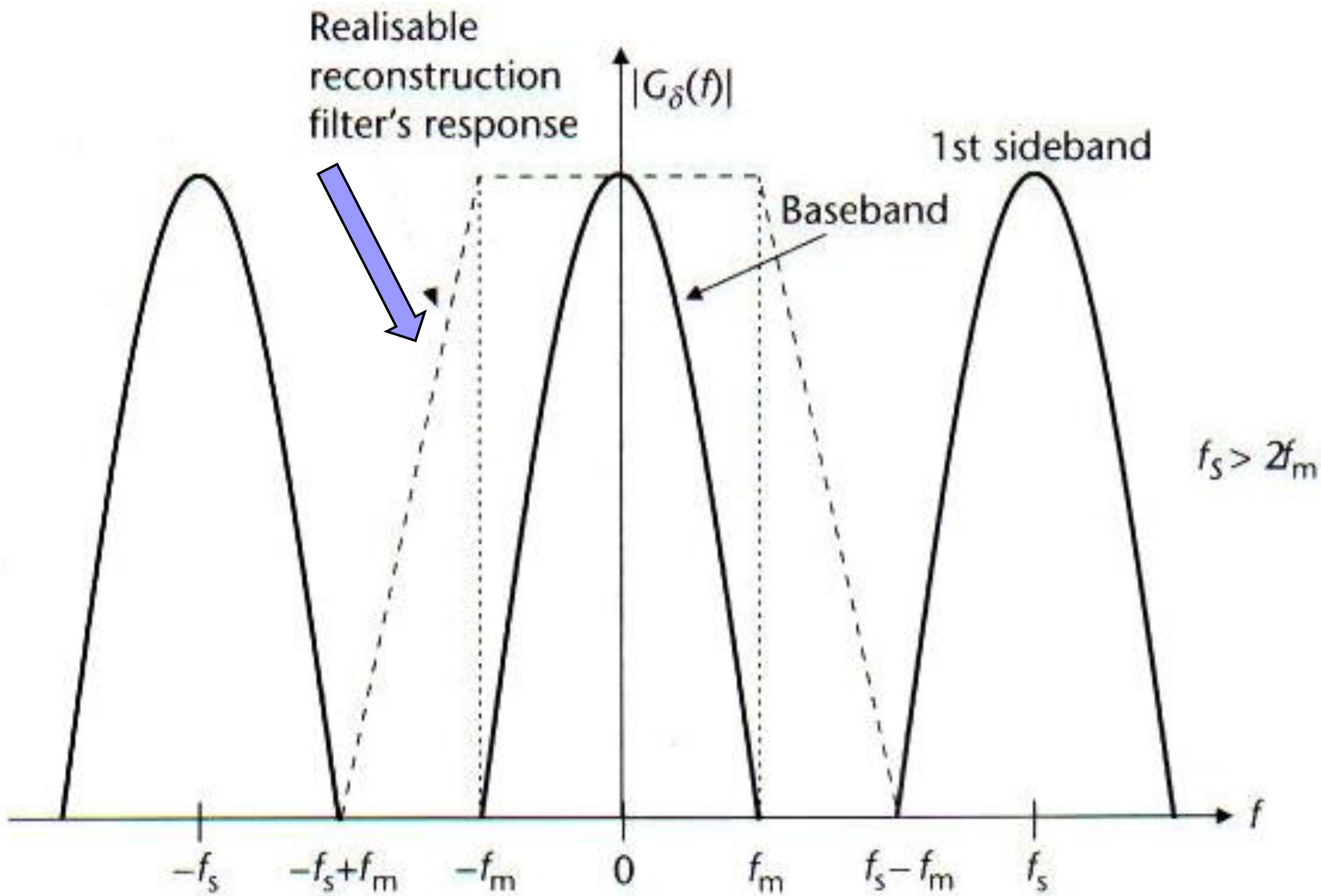
Espectro da
sinusóide



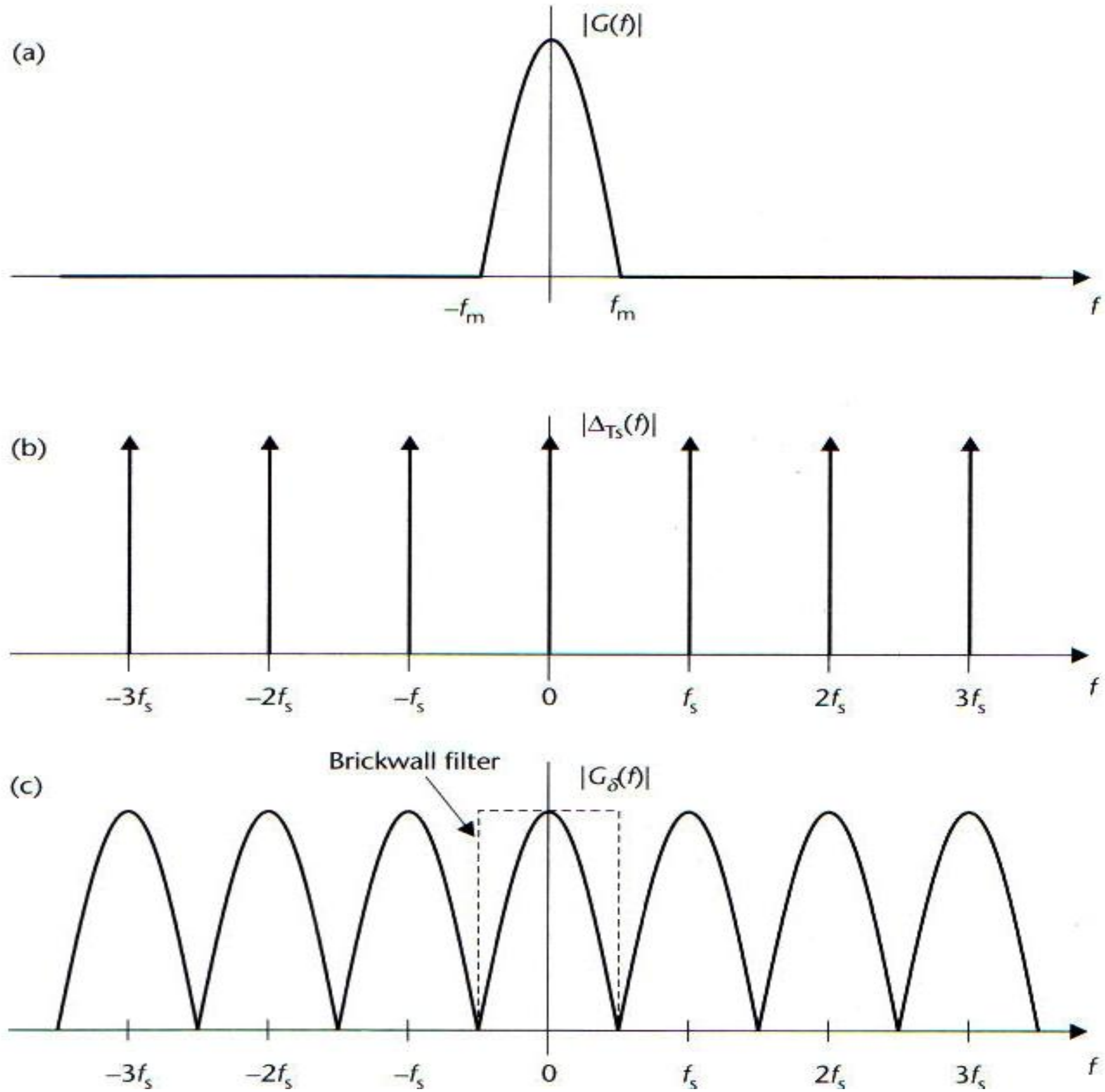
Sinal Amostrado
Réplicas Espectrais



2. Filtro Reconstructor Real



2. Amostragem à frequência de Nyquist



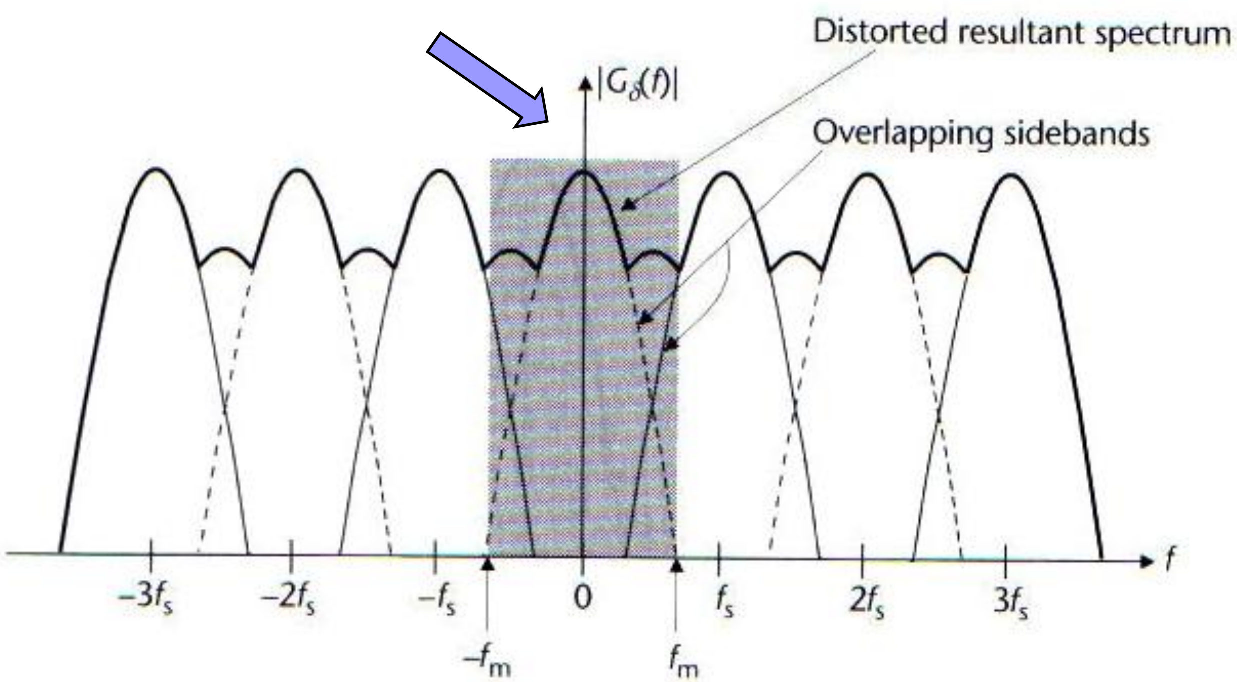
Filtro Reconstructor
deve ser ideal !

3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

• Quando não se cumpre o ritmo de Nyquist, as réplicas espectrais sobrepõem-se

• O espectro fica distorcido devido ao "aparecimento de novas frequências" , designadas de *alias*

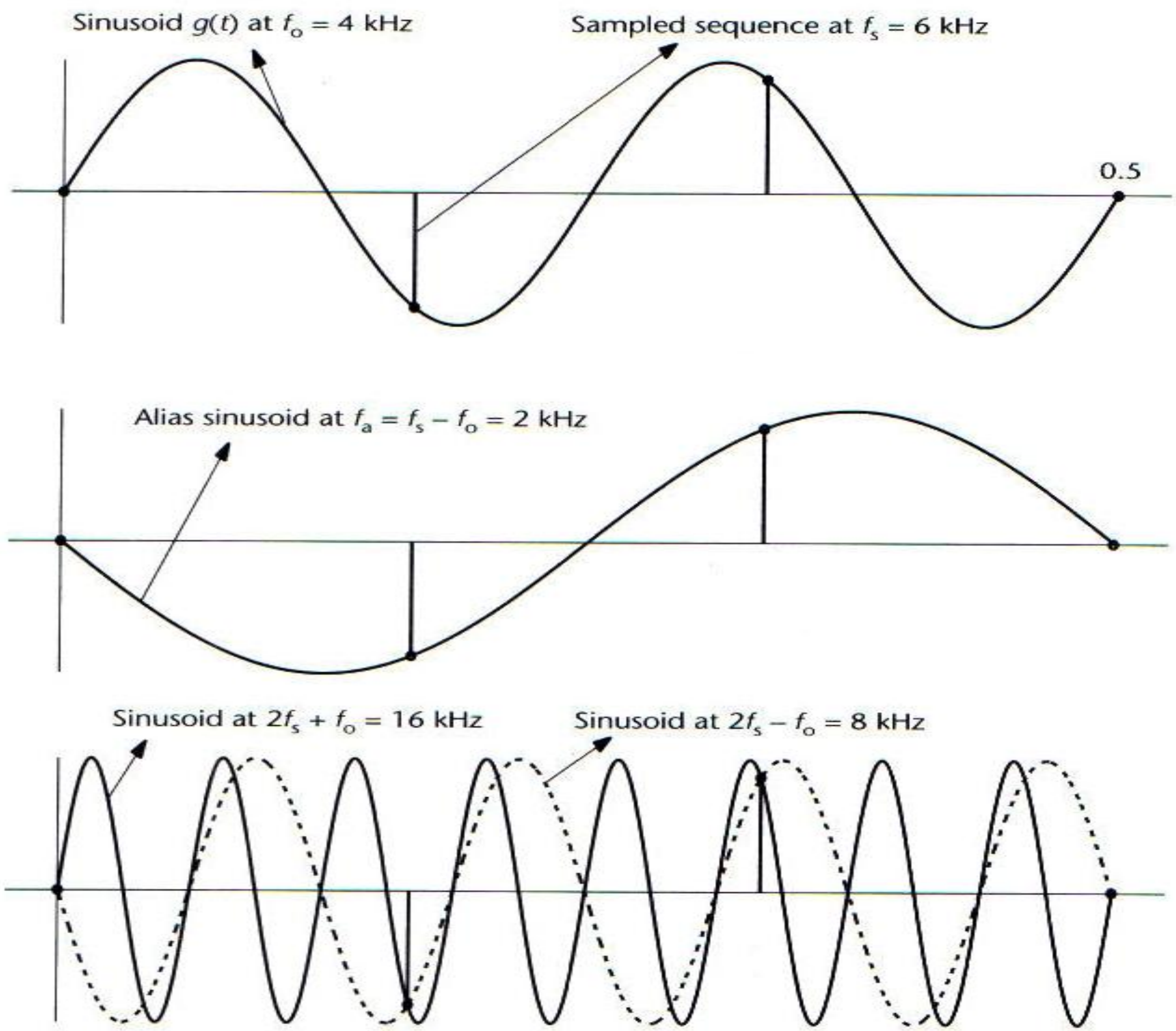
• Assim, é impossível reconstruir o sinal original



3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

- Sinusóide de 4 kHz amostrada à frequência de 6 kHz

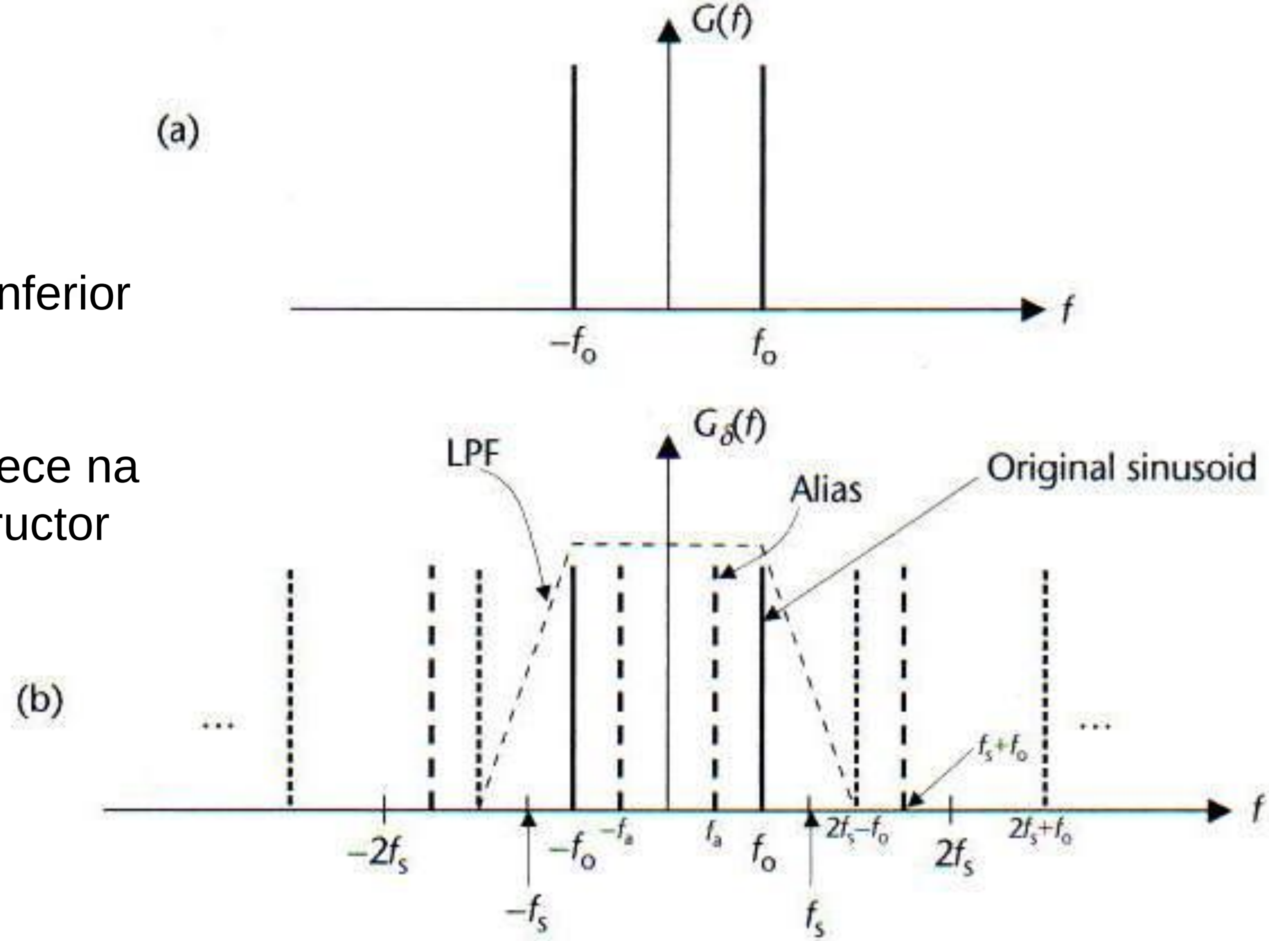
- Frequência *alias* de 2 kHz = 6 – 4 k Hz



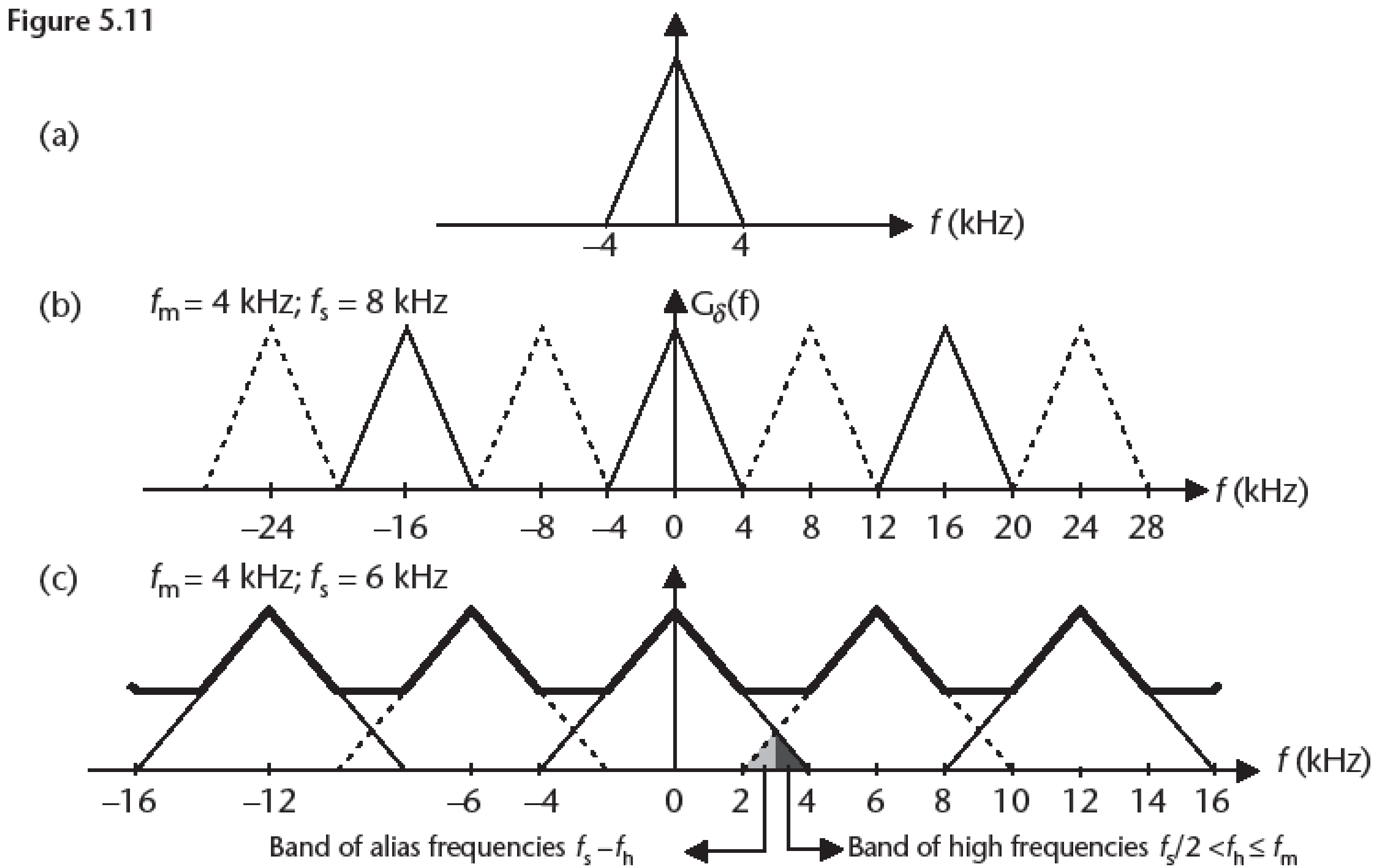
3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

A componente *alias* é inferior à frequência original

Esta componente aparece na banda do filtro reconstructor



3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

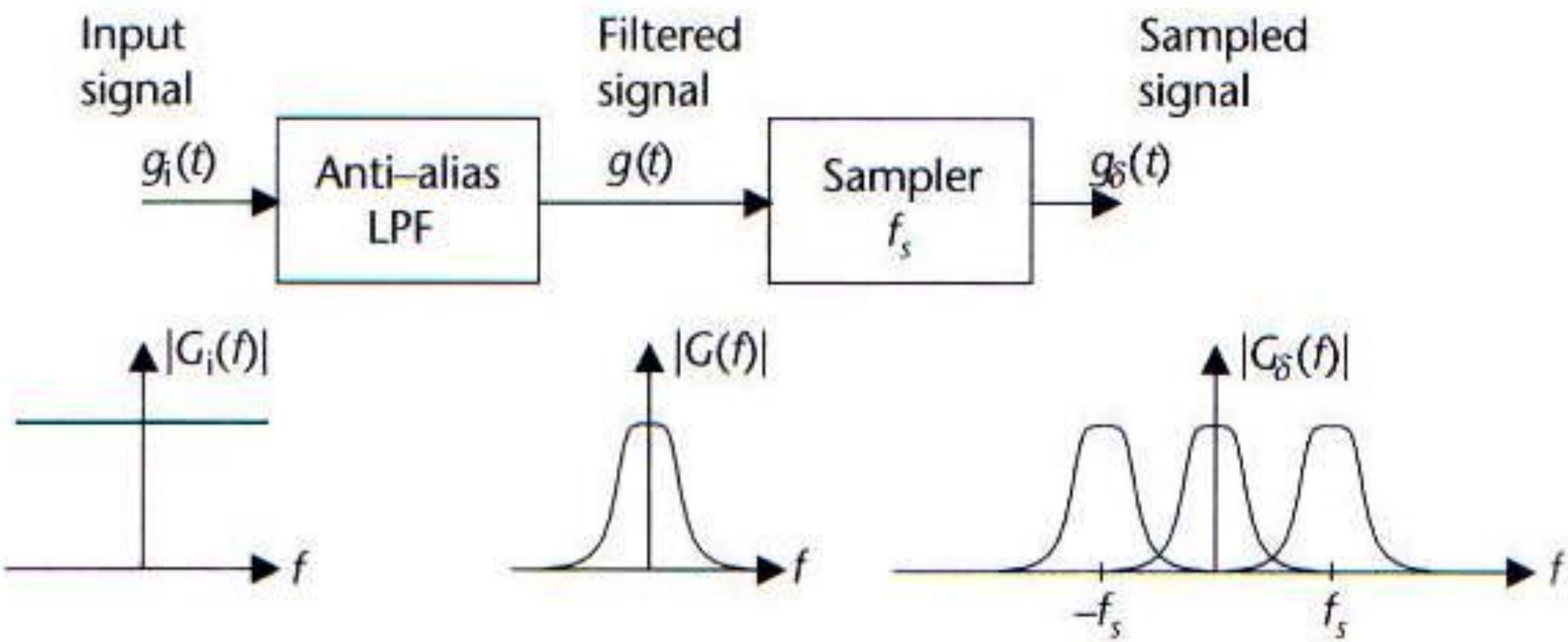


Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

3. Sobreposição Espectral - *Aliasing*

Filtro anti-*aliasing* – idealmente, é um filtro passa-baixo com frequência de corte F_s /2

Remove as componentes acima do Ritmo de Nyquist



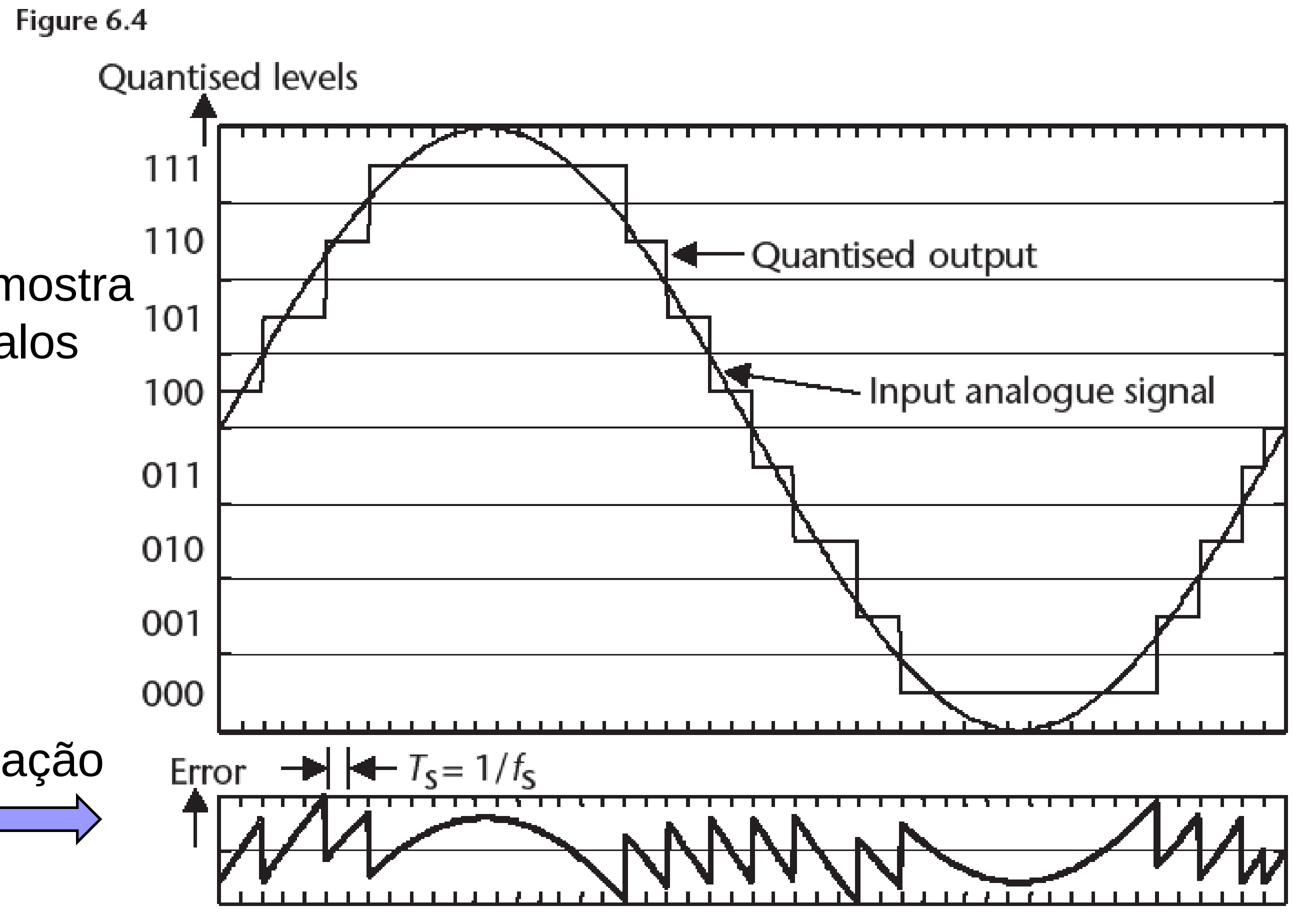
4. Quantificação (uniforme)

• Representação das amplitudes do sinal amostrado através de palavras binárias com *n* bit (usando 2^n intervalos de igual dimensão – uniforme)

• Após a amostragem, realiza-se a quantificação (discretização das amplitudes)

Com *n* bit por amostra temos 2^n intervalos

Erro de quantificação



Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

4. Quantificação

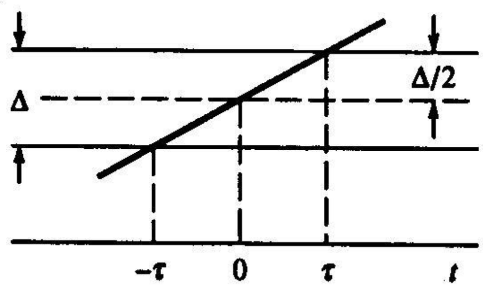
Erro de Quantificação na conversão Analógico/Digital $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$

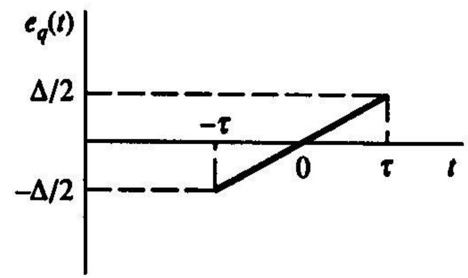
No máximo, o valor absoluto do erro de quantificação é metade da largura do intervalo

Considerando que o erro de quantização tem distribuição uniforme no intervalo de quantificação, temos

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q{}^2(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau} e_q{}^2(t)dt$$

$$e_q(t) = (\Delta/2\tau)t \qquad -\tau \le t \le \tau$$





4. Quantificação

SNR – Signal to Noise Ratio de Quantificação mede o erro de quantização
Menor erro conduz a SNR mais elevada

$$SNR = 3 \times 2^{2n} \times \frac{P_x}{V^2}$$

$$SNR_{dB} = 6,02\, n + 10 \log_{10}\left(\frac{P_x}{V^2}\right) dB$$

onde ***n*** é o número de bits por amostra

***P**$_x$* é a potência do sinal quantificado

V é a amplitude máxima quantificável

(valores possíveis do sinal entre **+*V*** e **–*V***)

4. Quantificação

Por cada bit que se acrescenta ao conversor incrementa-se 6 dB na SNR.

Cada bit a mais por amostra conduz à duplicação do número de intervalos

A duplicação do número de intervalos reduz para metade o erro de quantificação

No formato CD Áudio: 16 bits => $SNR = 1{,}76 + 6{,}02 * 16 = 98{,}08 \quad dB$
(gama dinâmica do ouvido humano é aproximadamente 100 dB)

Exemplos
CD Áudio: Fs=44100 Hz e n=16 bit/amostra
Digitalização de Fala: Fs=8000 Hz e n=8 bit/amostra