DFT e IDFT

Sistemas de Telecomunicações Definidos por Software

&

Processamento de Sinal em Tempo Real

Tópicos abordados

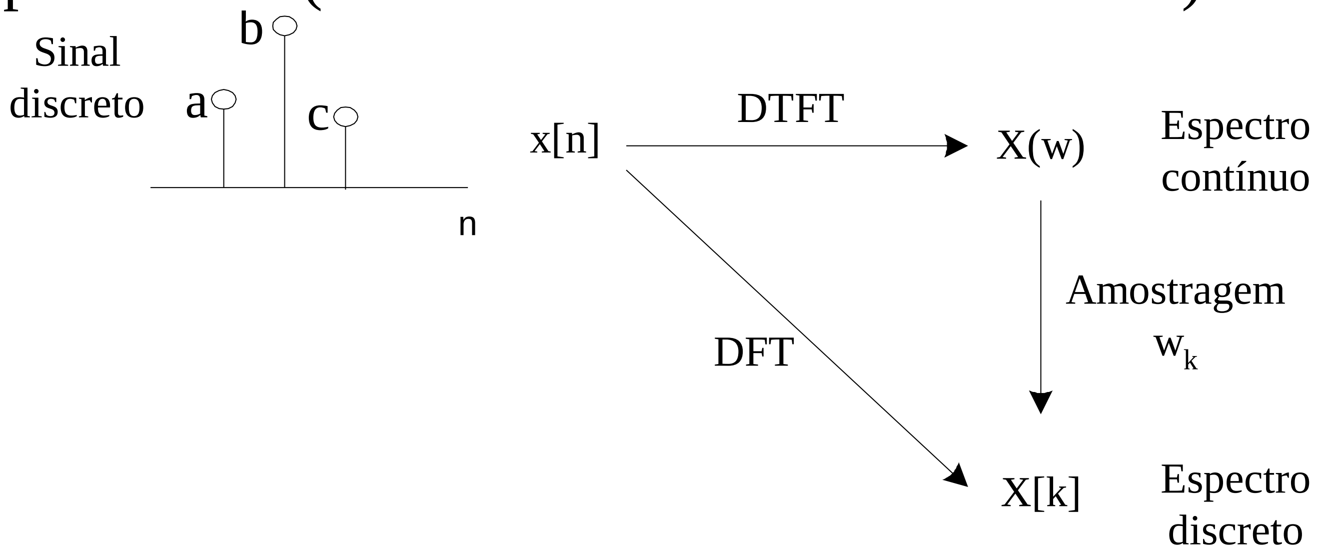
- DFT – Discrete Fourier Transform
- IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform
  - Definição
  - Relação com a DTFT
  - Cálculo matricial

DFT – Discrete Fourier Transform

- Assume que o sinal é periódico com N amostras por período
- Realiza a amostragem do espectro nas frequências dadas por

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

- Amostra/discretiza, de forma equi-espaçada, o espectro contínuo obtido pela DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)

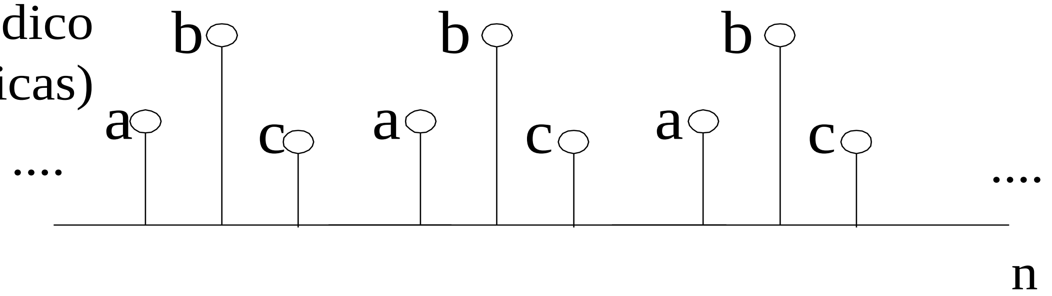


- Por exemplo, com N=4 analisam-se as frequências $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}$

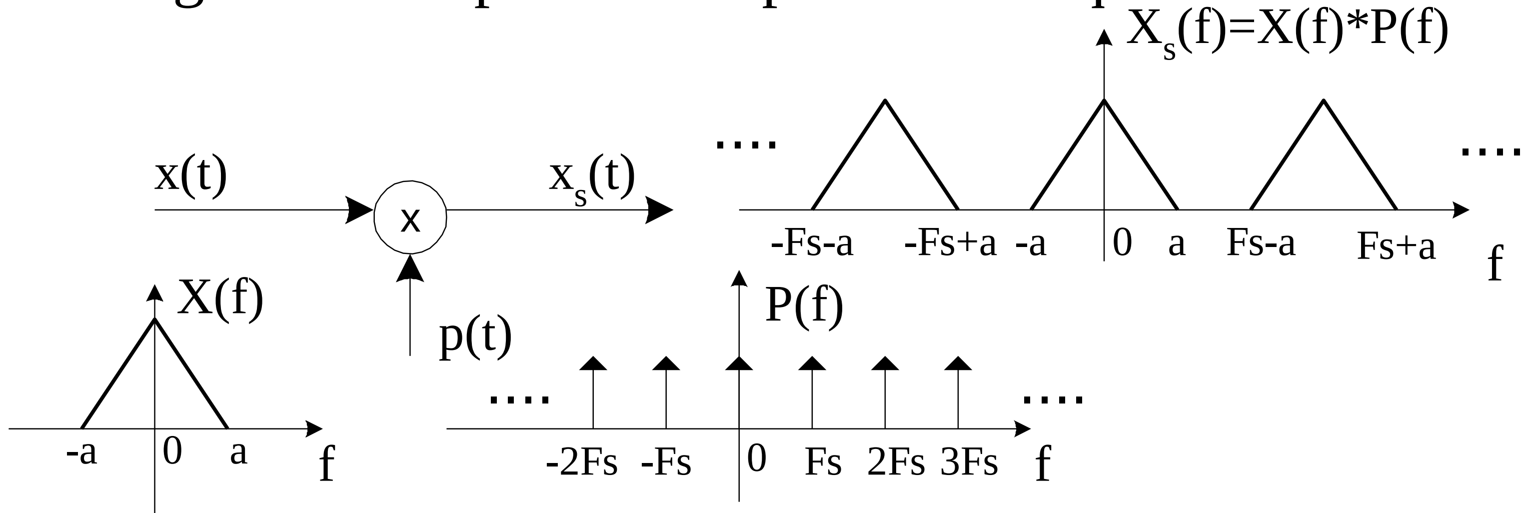
Amostragem do espectro

- A amostragem na frequência causa réplicas no tempo (espectro discreto implica sinal periódico no tempo)

Sinal periódico (réplicas)



- A amostragem no tempo causa réplicas na frequência



DTFT – Discrete-Time Fourier Transform

Transformada directa (**DTFT**)

$$X(w) = \mathrm{DTFT}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}$$

Transformada inversa (**IDTFT**)

$$x[n] = \mathrm{IDTFT}[X(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$$

Exemplos:

$$x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1] \qquad X(w) = 3 - 2e^{-jwn}$$

$$y[n] = \alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 \qquad Y(w) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jw}}$$

$$z[n] = \frac{W_o}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W_o}{\pi}n\right) \qquad Z(w) = \prod\left(\frac{w}{2W_o}\right)$$

DFT e IDFT: definição

- Considerando que o sinal x[n] é periódico com N amostras por período, temos um espectro **discreto**:

$$X(w_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j w_k n}$$

com $w_k = \frac{2\pi k}{N},\ \ k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Equação de análise ou transformada directa (**DFT**): tempo para a frequência

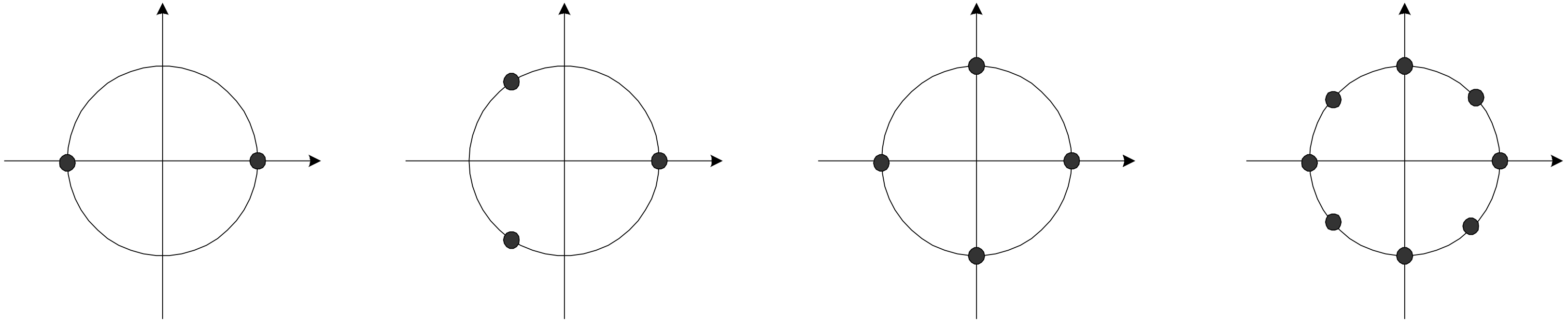
$$X[k] = \mathrm{DFT}[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j w_k n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Equação de síntese ou transformada inversa (**IDFT**): frequência para o tempo

$$x[n] = \mathrm{IDFT}[X[k]] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

DFT: frequências analisadas

Análise gráfica das frequências amostradas, em função do número de pontos N



N	Frequências
2	$\{0, \pi\}$
3	$\{0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\}$
4	$\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}$
8	$\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\}$

Frequências analisadas:

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Cálculo da DFT a 4 pontos

- Os coeficientes da DFT_4 do sinal x[n] são obtidos por:

$$X[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{j2\pi 0n}{4}} = \sum_{n=0}^{3} x[n] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{j2\pi 1n}{4}} = x[0] + x[1] e^{-\frac{j2\pi 1}{4}} + x[2] e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} + x[3] e^{-\frac{j2\pi 3}{4}}$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{j2\pi 2n}{4}} = x[0] + x[1] e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} + x[2] e^{-\frac{j2\pi 2.2}{4}} + x[3] e^{-\frac{j2\pi 2.3}{4}}$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{j2\pi 3n}{4}} = x[0] + x[1] e^{-\frac{j2\pi 3}{4}} + x[2] e^{-\frac{j2\pi 3.2}{4}} + x[3] e^{-\frac{j2\pi 3.3}{4}}$$

Cálculo da DFT a 4 pontos

Analisando os coeficientes e os vectores de base tem-se:

$$X[0] = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$X[1] = \left[1 \;\; e^{-\frac{j2\pi 1}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 3}{4}}\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$X[2] = \left[1 \;\; e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 2.2}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 2.3}{4}}\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$X[3] = \left[1 \;\; e^{-\frac{j2\pi 3}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 3.2}{4}} \;\; e^{-\frac{j2\pi 3.3}{4}}\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Cálculo matricial da DFT

Agrupando os vectores base em matriz, tem-se:

$$\mathrm{y} = \mathrm{DFT}_4[\mathrm{x}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi 1}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 3}{4}} \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi 2}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 2.2}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 2.3}{4}} \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi 3}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 3.2}{4}} & e^{-\frac{j2\pi 3.3}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Simplificando, tem-se o cálculo matricial da DFT:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

DFT: cálculo matricial

- Genericamente, colocando o vector **x** em evidência, estabelece-se a matriz F (operador DFT)

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \overset{n}{\dots} & N-1 \end{array} \\
F = & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ k \\ \dots \\ N-1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & \bullet & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]
\end{array}
\qquad e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}
$$

Cálculo matricial da DFT

x é o sinal no tempo

y são os coeficientes da DFT

$$\mathbf{y} = DFT[x] = \mathbf{F}x$$

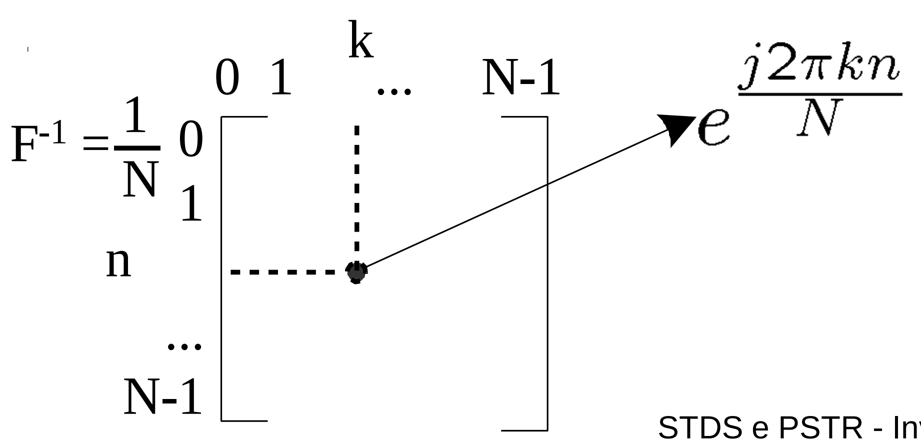
- Por exemplo, para N=2, 3 e 4 tem-se, respectivamente:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 2}{3}} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi 2}{3}} & e^{-j\frac{2\pi 4}{3}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

IDFT: cálculo matricial

- De forma análoga estabelece-se o operador que calcula a IDFT
- Verifica-se que este é dado por $\mathbf{F}^{-1}$: $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{y}$
- Por sua vez $\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^*$
- Tem-se assim o cálculo matricial da IDFT:

$$\mathbf{x} = \mathrm{IDFT}[y] = \frac{1}{N}\mathbf{F}^* y$$



Cálculo matricial da IDFT

x é o sinal no tempo

y são os coeficientes da DFT

Referências e links

1. A. Oppenheim, R. Schafer, J. Buck, ***Discrete-time Signal Processing***, second edition, Prentice-Hall, 1999.

2. S. Kuo, B. Lee, **Real-Time Digital Signal Processing - Implementations Applications and Experiments with the TMS320C55x**, Wiley, 2001.

Curso on-line sobre a DFT:

http://www.spd.eee.strath.ac.uk/users/interact/moved/dft/dftideas.html