Tópicos sobre cálculo matricial

Processamento Digital de Sinal II

Artur Ferreira e Paulo Marques

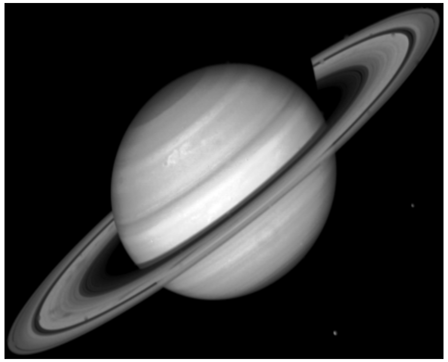
(Dezembro 2003)

A motivação

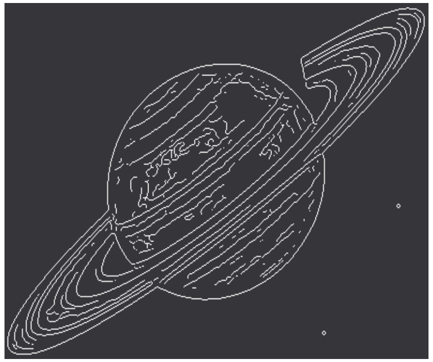
- Muitas operações de processamento de sinal e imagem são realizadas com cálculo matricial

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Rotação e detecção de contornos

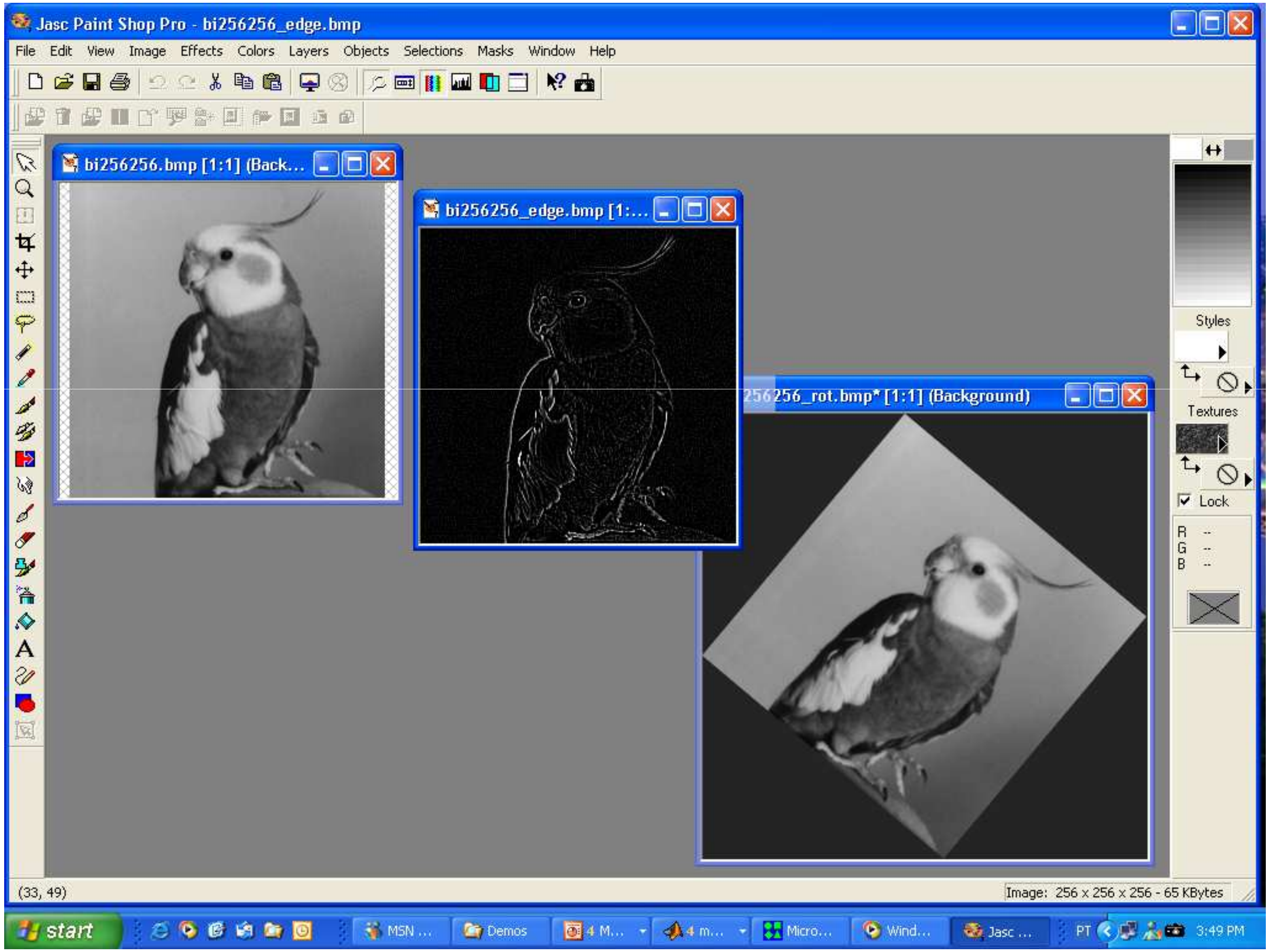


$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$



A motivação

Detecção de contornos e rotação no Paint Shop Pro



A motivação

Codificação com perda de imagem - a norma JPEG

Original

(256 x 256 = 65536 bytes)

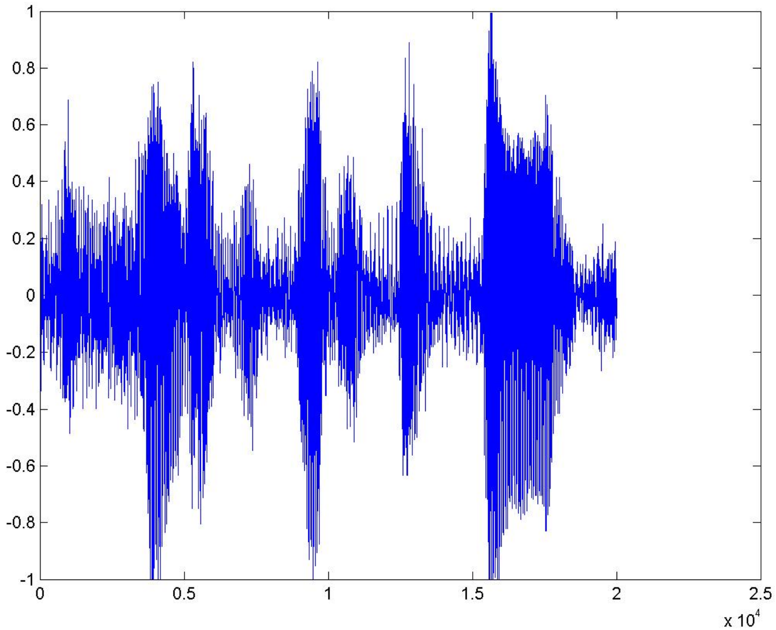
Codificada, com perda

(2882 bytes)

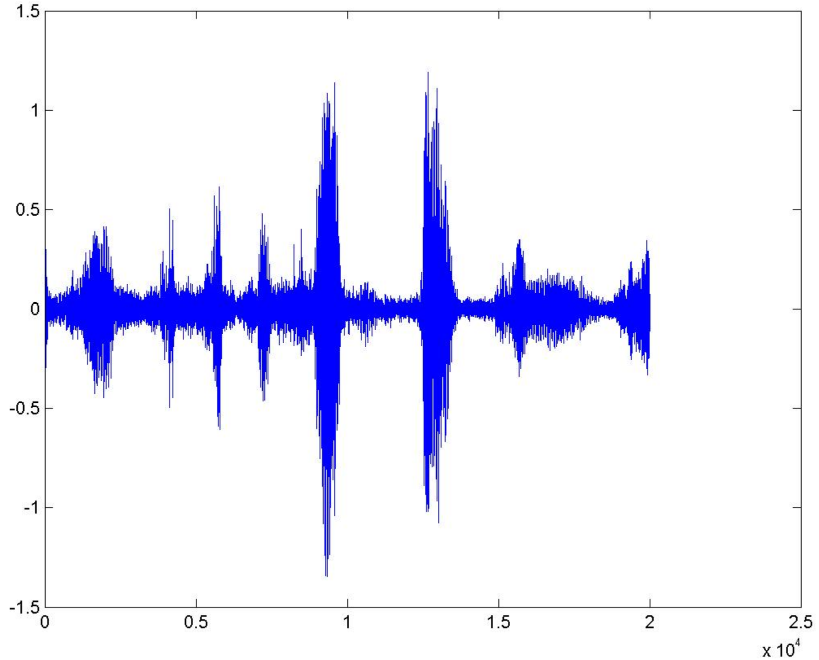
A motivação

Filtragem passa-alto de sinal audio

Sinal original **x**



Sinal filtrado **y**



$$z = \mathbf{T}x$$

Passa alto

$z_1 \leftarrow$ Colocar alguns coeficientes de z a zero

$$y = \mathbf{T}^{-1} z_1$$

Matriz como operador

- A matriz é um **operador**; exemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere-se o vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sobre o qual se aplicam os operadores A, B, C:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{2}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

Identidade — Amplificação — Uma permutação

Matriz de rotação

Matriz de rotação: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$

Sejam $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $u = \mathbf{D}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x\sin(\theta) - y\cos(\theta) \\ x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \end{bmatrix}$

Verifica-se que:

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$||u|| = \sqrt{(x\sin(\theta) - y\cos(\theta))^2 + (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2} = ||v||$$

Preserva a norma do vector

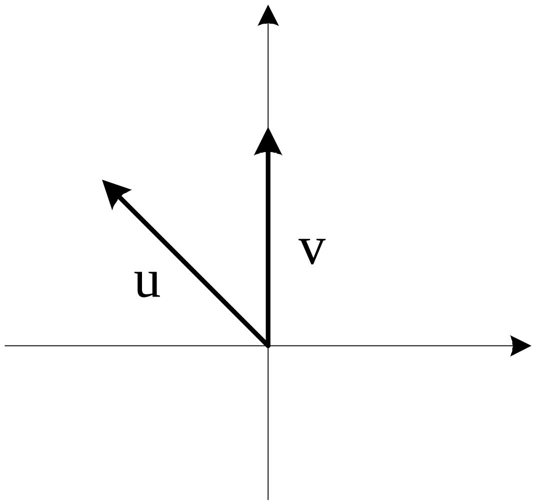
Matriz de rotação: exemplo

Com $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) & -\cos(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u = \mathbf{D}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- O vector u é uma rotação de v, com 45 graus
- Têm a mesma norma
- As colunas de **D** são ortogonais



Operação sobre vectores linha

Sejam

$$\mathbf{x} = [1,\ 2,\ 3\ ] \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

A multiplicação de vector (linha) por matriz resulta noutro vector (linha) que é obtido por combinação linear das linhas da matriz:

$$\mathbf{xA} = [1,\ 2,\ 3\ ] \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$= [1a + 2d + 3g, 1b + 2e + 3h, 1c + 2f + 3i]$$

$$= 1\,[a\ \ b\ \ c] + 2\,[d\ \ e\ \ f] + 3\,[g\ \ h\ \ i]$$

<u>Operação sobre vectores coluna</u>

Sejam

$$\mathbf{x} = [1,\ 2,\ 3\ ] \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

A multiplicação matriz por vector (<u>coluna</u>) resulta noutro vector (<u>coluna</u>) que é obtido por combinação linear das <u>colunas</u> da matriz:

$$\mathbf{xA} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 2b + 3c \\ 1d + 2e + 3f \\ 1g + 2h + 3i \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

Operação sobre matrizes

Sejam

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = \begin{bmatrix} -2b & -2d \\ -2a & -2c \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

Troca as <u>linhas</u> de X e multiplica todos os elementos por -2

$$\mathbf{Z} = \mathbf{XA} = \begin{bmatrix} -2c & -2a \\ -2d & -2b \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$$

Troca as <u>colunas</u> de X e multiplica todos os elementos por -2

$$\mathbf{W} = \mathbf{AXA} = \begin{bmatrix} 4d & 4b \\ 4c & 4a \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

Troca as <u>linhas</u> e <u>colunas</u> de X e multiplica todos os elementos por 4

Matrizes ortogonais e unitárias

- Caso as colunas sejam vectores ortogonais, a matriz designa-se ortogonal – base ortogonal
- Caso as suas colunas tenham também norma unitária, definem transformadas unitárias – base ortonormada – preservam a norma
- Uma matriz unitária verifica: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*\mathrm{T}}$

Transformada em notação matricial:

- y = **T**x
  - **T** - transformada
  - x – vector original (domínio do espaço)
  - y – vector de coeficientes (domínio da transformada)

Matrizes unitárias e simétricas

A matriz de rotação é unitária - preserva a norma do vector, após a rotação:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Uma matriz simétrica verifica: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

Exemplos de matrizes ortogonais e simétricas:

$$\mathbf{DFT}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{DFT}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$