Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Comunicações

Pares típicos da Série e Transformada de Fourier

A tabela 1 apresenta alguns pares típicos da Série de Fourier, considerando a equação de síntese associada ao espectro unilateral dada por $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k)$, em que $x(t)$ é um sinal real periódico com frequência fundamental f_o e período fundamental $T_o = \frac{1}{f_o}$; A_k e ϕ_k são os coeficientes do espectro de amplitude e de fase, respectivamente.

Sinal Típico	**Tempo (Um Período)**	**Frequência**	
	$x(t)$	Amplitude A_k	Fase ϕ_k
Sinusóide	$A\cos(2\pi f_o t + \phi)$	$\begin{cases} A, & k=1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \phi, & k=1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$
Onda quadrada (par)	$A\prod\left(\frac{t}{\tau}\right),\ \|t\| < \frac{T_o}{2}$	$\begin{cases} A\frac{\tau}{T_o}, & k=0 \\ \left\|2A\frac{\tau}{T_o}\text{sinc}\left(k\frac{\tau}{T_o}\right)\right\|, & k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\pi, & a_k < 0 \\ 0, & a_k \geq 0 \end{cases}$
Onda quadrada (ímpar)	$\begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_o}{2} \\ -1, & -\frac{T_o}{2} < t < T_o \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{4}{\pi k}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ -\frac{\pi}{2}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$
Onda dente de serra	$\frac{t}{T_o},\ 0 < t < T_o$	$\begin{cases} \frac{1}{2}, & k=0 \\ \frac{1}{\pi k}, & k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{\pi}{2}, & k>0 \end{cases}$
Onda triangular (par)	$1 - \frac{4\|t\|}{T_o},\ \|t\| < \frac{T_o}{2}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ 2\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ ímpar} \end{cases}$	0

Tabela 1: Pares típicos da Série de Fourier, com espectro unilateral ($k \geq 0$).

A tabela 2 apresenta os mesmos pares típicos da tabela 1 considerando espectro bilateral, com equação de síntese dada por $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(2\pi k f_o t + \Phi_k)$, tal que

$$c_k = \begin{cases} A_k, & k=0 \\ \frac{A_k}{2}, & k>0 \end{cases} \qquad \Phi_k = \begin{cases} \phi_k, & k=0 \\ \phi_k, & k>0 \end{cases}$$

$$c_{-k} = c_k,\ k \neq 0 \qquad \Phi_{-k} = -\Phi_k,\ k \neq 0.$$

Sinal Típico	**Tempo (Um Período)**	**Frequência**	
	$x(t)$	Amplitude c_k	Fase Φ_k
Sinusóide	$A\cos(2\pi f_o t + \phi)$	$\begin{cases} \frac{A}{2}, & k=1 \\ \frac{A}{2}, & k=-1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \Phi, & k=1 \\ -\Phi, & k=-1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$
Onda quadrada (par)	$A\prod\left(\frac{t}{\tau}\right),\ \|t\| < \frac{T_o}{2}$	$\begin{cases} A\frac{\tau}{T_o}, & k=0 \\ \left\|A\frac{\tau}{T_o}\text{sinc}\left(k\frac{\tau}{T_o}\right)\right\| & k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \pi, & a_k < 0 \wedge k < 0 \\ -\pi, & a_k < 0 \wedge k > 0 \\ 0, & a_k \geq 0 \end{cases}$
Onda quadrada (ímpar)	$\begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_o}{2} \\ -1, & -\frac{T_o}{2} < t < T_o \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{2}{\pi\|k\|}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ -\frac{\pi}{2}, & k > 0 \text{ e ímpar} \\ \frac{\pi}{2}, & k < 0 \text{ e ímpar} \end{cases}$
Onda dente de serra	$\frac{t}{T_o},\ 0 < t < T_o$	$\begin{cases} \frac{1}{2}, & k=0 \\ \frac{1}{2\pi\|k\|}, & k>0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{\pi}{2}, & k>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & k<0 \end{cases}$
Onda triangular (par)	$1 - \frac{4\|t\|}{T_o},\ \|t\| < \frac{T_o}{2}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ ímpar} \end{cases}$	0

Tabela 2: Pares típicos da Série de Fourier, com espectro bilateral ($k \in \mathcal{Z}$).

A tabela 3 apresenta os pares típicos da Transformada de Fourier, considerando a equação de síntese dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(j2\pi f t)\ df,$$

em que $x(t)$ é um sinal não periódico com espectro contínuo

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi f t)\ dt,$$

o qual se decompõe em espectro de amplitude $A(f)$ e de fase $\phi(f)$, respectivamente. Neste contexto, apresentam-se algumas propriedades da transformada de Fourier na tabela 4.

Sinal Típico	**Tempo** $x(t)$	**Frequência** $X(f)$
Pulso rectangular	$A\prod\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
Pulso sinusoidal	$A\prod\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$	$\frac{AT}{2}\text{sinc}((f-f_c)T) + \frac{AT}{2}\text{sinc}((f+f_c)T)$
Sinc	$\text{sinc}(bt)$	$\dfrac{1}{b}\prod\left(\dfrac{f}{b}\right)$
Impulso Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Pulso triangular	$A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
Exponencial (t>0)	$\exp^{-bt}u(t)$	$\frac{1}{b+j2\pi f}$
Exponencial simétrica	$\exp^{-b\|t\|}$	$\dfrac{2b}{b^2+(2\pi f)^2}$
Sinc quadrada	$\text{sinc}^2(bt)$	$\dfrac{1}{b}\Lambda\left(\dfrac{f}{b}\right)$
Gaussiana	$\exp^{-\pi(bt)^2}$	$\dfrac{1}{b}\exp^{-\pi\left(\frac{f}{b}\right)^2}$
Função degrau unitário	u(t)	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Função sinal	sgn(t)	$\frac{1}{j\pi f}$
Trem de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$	$F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-kF_s)$

Tabela 3: Pares típicos de Transformada de Fourier (espectro bilateral).

Propriedade	**Tempo** $x(t), y(t)$	**Frequência** $X(f), Y(f)$
Linearidade	$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i X_i(f)$
Modulação	$x(t)A\cos(2\pi f_c t)$	$\frac{A}{2}X(f-f_c) + \frac{A}{2}X(f+f_c)$
Convolução	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
Time-Shift	$x(t-b)$	$X(f)\exp^{-j2\pi f b}$
Time-Scale	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
Time-Shift e Time-Scale	$x(at-b)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})\exp^{-j2\pi\frac{f}{a}b}$
Multiplicação	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Dualidade	$X(t)$	$x(-f)$
Multiplicação por t^n	$t^n x(t)$	$(-j2\pi)^n\frac{d^nX(f)}{df^n}$
Derivação	$\frac{d^nx(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Integração	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\ dt$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

Tabela 4: Propriedades da Transformada de Fourier (espectro bilateral).

ISEL, 5 de Dezembro de 2011.