

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Engenharia Informática e de Computadores

Teoria dos Sinais e dos Sistemas
O procedimento de *Gram-Schmidt*: definição, exemplos e aplicações

Artur Ferreira {arturj@isel.pt}

15 Outubro 2001

Versão 1.0

Motivação e Objectivos

Este documento tem como objectivo apresentar o procedimento de *Gram-Schmidt*, como método sistemático de obtenção de base ortonormada para determinado conjunto de sinais. Começa-se por resumir as propriedades dos vectores, realizando de seguida o mapeamento entre sinais e vectores. Apresenta-se o procedimento como um algoritmo que manipula sinais como vectores. Apresentam-se exemplos de cálculo de bases ortonormadas, com a respectiva interpretação vectorial. Utilizam-se sinais contínuos de energia e discretos de potência como exemplos. Exploram-se conceitos da análise de sinais como vectores, tais como: a norma, o produto interno, ângulo relativo e projecção. Dá-se ênfase à exploração das propriedades das bases ortonormadas e dos coeficientes de projecção sobre as mesmas. No final sugerem-se exercícios de aplicação destes conceitos.

Índice

1	Resumo da análise de sinais como vectores	1
1.1	Conceitos básicos sobre vectores	1
1.1.1	Produto interno	1
1.1.2	Norma	1
1.1.3	Ângulo Relativo	1
1.1.4	Projecção vectorial	2
1.1.5	Base vectorial	2
1.1.6	Base ortonormada	3
1.1.7	Propriedades dos coeficientes de projecção	3
1.2	Relação entre sinais e vectores	3
2	Procedimento de <i>Gram-Schmidt</i>	5
2.1	Definição	5
2.1.1	Forma discriminada	5
2.1.2	Forma compacta	6
2.2	Propriedades do procedimento	6
2.2.1	Ilustração das propriedades	6
2.3	Interpretação vectorial	7
2.4	Exemplos de aplicação	8
2.4.1	Sinais contínuos de energia	8
2.4.2	Representação vectorial	12
2.4.3	Exemplo de outra base ortonormada	13
2.4.4	Sinais discretos de potência	14

1 Resumo da análise de sinais como vectores

Nesta secção introdutória resumem-se conceitos da análise de sinais como vectores, utilizados ao longo do restante documento. Tratando-se de um resumo, não dispensa a consulta da bibliografia recomendada sobre este tópico.

Introduzem-se conceitos matemáticos genéricos sobre vectores e em seguida estabelece-se a relação entre estes conceitos matemáticos e as propriedades físicas dos sinais.

1.1 Conceitos básicos sobre vectores

1.1.1 Produto interno

Da análise vectorial resulta que o produto interno é uma medida de semelhança entre vectores. Sejam \vec{x} e \vec{y} dois vectores com N elementos (coordenadas) tal que:

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N] \quad \vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N] \quad (1)$$

O produto interno entre estes dois vectores está definido da seguinte forma:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=1}^N x[n]y[n] \quad (2)$$

O cálculo do produto interno consiste no produto ponto a ponto dos dois vectores seguido da soma de todos esses produtos. Expresso na forma matricial tem-se:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = xy^T \quad (3)$$

Quando o produto interno entre dois vectores é nulo, estes dizem-se ortogonais (ou perpendiculares).

1.1.2 Norma

A norma (comprimento) do vector é definida em função do produto interno:

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\sum_{n=1}^N x^2[n]} = \sqrt{x^2[1] + x^2[2] + \dots + x^2[N]} \quad (4)$$

Atendendo à definição de norma tem-se que o produto interno entre dois vectores também pode ser escrito na forma:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\Theta_{xy}) \quad (5)$$

O produto interno de um sinal consigo mesmo resulta em:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\| \|\vec{x}\| \underbrace{\cos(0)}_1 = \|\vec{x}\|^2 \quad (6)$$

1.1.3 Ângulo Relativo

Por sua vez, o ângulo relativo entre dois vectores obtém-se a partir do produto interno:

$$\Theta_{xy} = \arccos \left(\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right) \quad (7)$$

Vectores ortogonais (perpendiculares) apresentam um ângulo relativo de $\frac{\pi}{2}$. Quanto menor for o valor do ângulo relativo mais próximos (semelhantes) são os vectores.

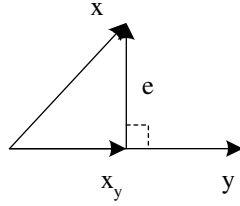


Figura 1: Ilustração da projecção de vectores.

1.1.4 Projecção vectorial

A projecção de um vector sobre outro é um conceito fundamental na manipulação de vectores sobre uma base vectorial. Considere a figura 1 onde se ilustra a projecção do vector \vec{x} sobre o vector \vec{y} . Analisando a figura, podemos definir o vector projecção de \vec{x} sobre \vec{y} como:

$$\vec{x}_y = \alpha \vec{y} \quad (8)$$

indicado que \vec{x}_y e \vec{y} são colineares. Por sua vez o vector \vec{e} é definido como:

$$\vec{x} = \vec{x}_y + \vec{e} \iff \vec{e} = \vec{x} - \vec{x}_y \quad (9)$$

Verifica-se também que \vec{e} é ortogonal a \vec{y} :

$$(\vec{e}, \vec{y}) = 0 \quad (10)$$

O coeficiente de projecção α traduz a porção do vector \vec{x} que se projecta sobre o vector \vec{y} . Vamos determinar a expressão genérica deste coeficiente de projecção, utilizando conjuntamente as equações (8), (9) e (10).

$$\begin{aligned} (\vec{e}, \vec{y}) = 0 &\iff (\vec{x} - \vec{x}_y, \vec{y}) = 0 \\ (\vec{x} - \alpha \vec{y}, \vec{y}) = 0 &\iff (\vec{x}, \vec{y}) - \alpha (\vec{y}, \vec{y}) = 0 \iff (\vec{x}, \vec{y}) = \alpha (\vec{y}, \vec{y}) \\ \alpha &= \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})} \iff \alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Tendo em conta a equação (5) tem-se que o coeficiente de projecção da equação (11) pode ser escrito na forma:

$$\alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} = \frac{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\Theta_{xy})}{\|\vec{y}\|^2} = \frac{\|\vec{x}\| \cos(\Theta_{xy})}{\|\vec{y}\|} \quad (12)$$

No caso do vector \vec{y} ter norma unitária, $\|\vec{y}\| = 1$, o cálculo do coeficiente de projecção é simplificado:

$$\alpha = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (13)$$

$$\alpha = \|\vec{x}\| \cos(\Theta_{xy}) \quad (14)$$

1.1.5 Base vectorial

A um conjunto de N vectores ortogonais entre si dá-se o nome de base vectorial (ou base ortogonal). Considere o conjunto $\Phi = \{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \dots, \vec{\Phi}_N\}$ com N vectores ortogonais (os vectores de base). Este conjunto gera um espaço vectorial de dimensão N . Qualquer elemento \vec{x} , desse

espaço (ou seja, um vector com N coordenadas) pode ser escrito na forma de combinação linear dos vectores de base:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k = \alpha_1 \vec{\Phi}_1 + \alpha_2 \vec{\Phi}_2 + \dots + \alpha_N \vec{\Phi}_N \quad (15)$$

Os coeficientes α_k da combinação linear resultam da projecção do vector \vec{x} sobre os N vectores de base:

$$\alpha_k = \frac{(\vec{x}, \vec{\Phi}_k)}{\|\vec{\Phi}_k\|^2} \quad (16)$$

1.1.6 Base ortonormada

Considere o conjunto de vectores ortogonais $\Phi = \{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \dots, \vec{\Phi}_N\}$. Se para além de ortogonais entre si, todos estes vectores possuírem norma unitária a base diz-se ortonormada (ortogonal + normalizada), tal como expresso na equação (17).

$$(\vec{\Phi}_m, \vec{\Phi}_l) = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases} \quad (17)$$

Nesta situação, os coeficientes de projecção são calculados, de acordo com a equação (13), ou seja:

$$\alpha_k = (\vec{x}, \vec{\Phi}_k) \quad (18)$$

1.1.7 Propriedades dos coeficientes de projecção

Quando se projecta um vector sobre determinada base ortogonal ou ortonormada os coeficientes de projecção descrevem univocamente o vector. São as coordenadas do sinal nesse espaço vectorial. Considere os vectores \vec{x} e \vec{y} escritos sobre a mesma base ortonormada:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k \quad \vec{y} = \sum_{k=1}^N \beta_k \vec{\Phi}_k \quad (19)$$

Assumindo que os coeficientes de projecção α_k e β_k são reais, tem-se que o produto interno (\vec{x}, \vec{y}) é dado por:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k, \sum_{k=1}^N \beta_k \vec{\Phi}_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \beta_k \quad (20)$$

Por outro lado calculando o produto interno do vector consigo próprio, tem-se:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k, \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \|\vec{x}\|^2 \quad (21)$$

1.2 Relação entre sinais e vectores

A operação de produto interno está definida para todos os tipos de sinal, tal como se apresenta na tabela 1, considerando sinais reais. Sobre o produto interno de sinais contínuos de potência observe que o valor de T é o mínimo múltiplo comum entre os períodos dos dois sinais: $T = mmc(T_x, T_y)$. O mesmo se passa para sinais discretos de potência: $N = mmc(N_x, N_y)$.

Realizando o produto interno de um sinal consigo mesmo, tal como indicado na tabela 2, conclui-se que:

Tipo	Contínuo	Discreto
Energia	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]$
Potência	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt$	$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n]$

Tabela 1: Definição do produto interno para os quatro tipos de sinal com amplitudes reais.

Tipo	Contínuo	Discreto
Energia	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$
Potência	$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$	$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$

Tabela 2: Produto interno de um sinal consigo próprio.

- se o sinal é de **energia**, obtém-se o valor da sua energia: E_x ;
- se o sinal é de **potência**, obtém-se o valor da sua potência: P_x ;

Tendo em conta a equação (6) conclui-se que a ligação entre sinais e vectores é estabelecida entre a energia/potência do sinal e a norma do vector.

$$(x, x) = \|x\|^2 = E_x, \quad \textit{tipo energia.} \quad (22)$$

$$(x, x) = \|x\|^2 = P_x, \quad \textit{tipo potência.} \quad (23)$$

Ou de outra forma, tem-se que o comprimento (norma) do vector que representa o sinal é a raiz quadrada da sua energia, caso o sinal seja do tipo energia, ou então a raiz quadrada da sua potência caso o sinal seja do tipo potência.

$$\|x\| = \sqrt{E_x}, \quad \textit{tipo energia.} \quad (24)$$

$$\|x\| = \sqrt{P_x}, \quad \textit{tipo potência.} \quad (25)$$

Por sua vez, o ângulo relativo entre vectores descreve o desfasamento entre sinais.

2 Procedimento de *Gram-Schmidt*

O procedimento de *Gram-Schmidt* tem como finalidade obter uma base ortonormada onde se representa, sem erro de projecção, determinado conjunto de sinais. Os sinais podem ser de qualquer tipo: energia ou potência nos domínios contínuo e discreto, dado que são analisados como vectores.

2.1 Definição

Nesta secção apresenta-se o procedimento(algoritmo) em duas versões:

- **discriminada**, onde se evidenciam as propriedades do algoritmo passo a passo;
- **compacta**, em que se ilustra a simplicidade do algoritmo.

2.1.1 Forma discriminada

Entrada: conjunto de M sinais(vectores) com norma não nula $\{s_1, s_2, \dots, s_M\}$.

Saída: conjunto de N ($\leq M$) sinais(vectores) que formam uma base ortonormada $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ onde é possível representar os M sinais(vectores) de entrada sem erro de projecção.

1. Escolher um sinal de entrada (s_1 por exemplo) e efectuar a sua normalização, obtendo o primeiro sinal da base: $\Phi_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}$;
 2. Escolher outro sinal de entrada (s_2 por exemplo) e calcular a projecção sobre o sinal de base Φ_1 : $\alpha_{21} = (s_2, \Phi_1)$. Definir o sinal auxiliar de erro $g_2 = s_2 - \alpha_{21}\Phi_1$. Dado que g_2 é *ortogonal a* Φ_1 , obtém-se o segundo sinal de base: $\Phi_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$, se $\|g_2\| \neq 0$;
 3. Escolher outro sinal de entrada (s_3 por exemplo) e calcular a projecção sobre os dois sinais de base existentes: $\alpha_{31} = (s_3, \Phi_1)$ e $\alpha_{32} = (s_3, \Phi_2)$; Define-se o sinal de erro $g_3 = s_3 - \alpha_{31}\Phi_1 - \alpha_{32}\Phi_2$; Tendo em conta que g_3 é ortogonal a Φ_1 e Φ_2 obtém-se o terceiro sinal de base após normalização: $\Phi_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}$, se $\|g_3\| \neq 0$;
 4. Proceder como no ponto anterior até considerar os M sinais de entrada.
-

No ponto 2 do algoritmo afirma-se que g_2 e Φ_1 são ortogonais. Apresenta-se aqui a demonstração desse facto.

$$\begin{aligned} (g_2, \Phi_1) &= (s_2 - \alpha_{21}\Phi_1, \Phi_1) = (s_2, \Phi_1) - (\alpha_{21}\Phi_1, \Phi_1) = \\ &= \underbrace{(s_2, \Phi_1)}_{\alpha_{21}} - \alpha_{21} \underbrace{(\Phi_1, \Phi_1)}_1 = \alpha_{21} - \alpha_{21} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

De forma idêntica, no ponto 3 indica-se que g_3 é ortogonal a Φ_1 e Φ_2 . Demonstram-se de seguida estas ortogonalidades.

$$\begin{aligned} (g_3, \Phi_1) &= (s_3 - \alpha_{31}\Phi_1 - \alpha_{32}\Phi_2, \Phi_1) = \\ &= \underbrace{(s_3, \Phi_1)}_{\alpha_{31}} - \alpha_{31} \underbrace{(\Phi_1, \Phi_1)}_1 - \alpha_{32} \underbrace{(\Phi_2, \Phi_1)}_0 = \alpha_{31} - \alpha_{31} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$(g_3, \Phi_2) = (s_3 - \alpha_{31}\Phi_1 - \alpha_{32}\Phi_2, \Phi_2) = \underbrace{(s_3, \Phi_2)}_{\alpha_{32}} - \alpha_{31} \underbrace{(\Phi_1, \Phi_2)}_0 - \alpha_{32} \underbrace{(\Phi_2, \Phi_2)}_1 = \alpha_{32} - \alpha_{32} = 0 \quad (28)$$

2.1.2 Forma compacta

Entrada: conjunto de M sinais(vectores) com norma não nula $\{s_1, s_2, \dots, s_M\}$.

Saída: conjunto de N ($\leq M$) sinais(vectores) que formam uma base ortonormada $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ onde é possível representar os M sinais(vectores) de entrada sem erro de projecção.

Os vectores Φ_k que constituem a base ortonormada são obtidos pela normalização dos vectores g_k :

$$\Phi_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad \|g_k\| \neq 0 \quad (29)$$

Os vectores g_k são obtidos da seguinte forma:

- $g_1 = s_1$ dá origem ao primeiro sinal de base;
 - $g_k = s_k - \sum_{m=1}^{k-1} (s_k, \Phi_m)\Phi_m = s_k - \sum_{m=1}^{k-1} \alpha_{km}\Phi_m$ $2 \leq k \leq M$
-

2.2 Propriedades do procedimento

O procedimento de *Gram-Schmidt*, garante a obtenção de uma base ortonormada que representa sem erro de projecção determinado conjunto de sinais de qualquer tipo, ou seja, de energia ou potência nos domínios contínuo e discreto. Esta generalização para qualquer tipo de sinal é conseguida através da análise de sinais como vectores.

A dimensão da base obtida (ou seja, o número total de sinais que a constituem) é a menor possível. Os sinais constituintes da base variam consoante a ordem pela qual são analisados os sinais de entrada.

2.2.1 Ilustração das propriedades

Considere o exemplo apresentado na figura 2 em que são dados $M = 3$ sinais de entrada para a aplicação do procedimento. Analisam-se os seguintes casos:

- (1) Os três sinais de entrada s_1 , s_2 e s_3 são colineares; a base obtida terá $N = 1$ sinal; a projecção dos sinais na base tem a forma:

$$\begin{aligned} \cdot s_1 &= \alpha_{11}\Phi_1; \\ \cdot s_2 &= \alpha_{21}\Phi_1; \\ \cdot s_3 &= \alpha_{31}\Phi_1; \end{aligned}$$

ou seja, apenas com um sinal de base exprimem-se os três sinais de entrada;

- (2) Dois sinais colineares s_1 e s_2 e o terceiro, s_3 , é ortogonal a estes dois; a base obtida terá $N = 2$ sinais; um sinal de base exprime s_1 e s_2 ; o outro sinal de base exprime s_3 :

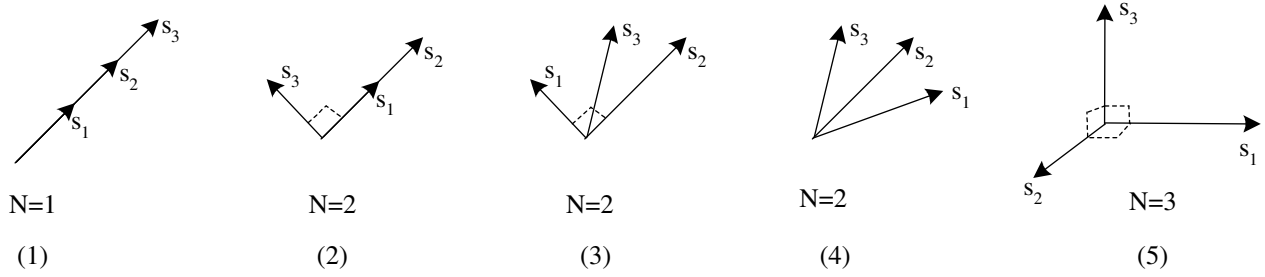


Figura 2: Ilustração da dimensão da base obtida em 5 casos diferentes.

- . $s_1 = \alpha_{11}\Phi_1$;
- . $s_2 = \alpha_{21}\Phi_1$;
- . $s_3 = \alpha_{32}\Phi_2$;

(3) Dois sinais ortogonais s_1 e s_2 e o terceiro, s_3 , é expresso pela combinação linear desses dois sinais: $s_3 = \alpha s_1 + \beta s_2$; a base obtida terá $N = 2$ sinais que resultam da normalização de s_1 e s_2 ; os sinais de entrada serão expressos na forma:

- . $s_1 = \alpha_{11}\Phi_1$;
- . $s_2 = \alpha_{22}\Phi_2$;
- . $s_3 = \alpha_{31}\Phi_1 + \alpha_{32}\Phi_2$;

(4) Existem dois sinais não colineares s_1 e s_2 e o terceiro, s_3 , é expresso pela combinação linear desses dois sinais; a base obtida terá $N = 2$ sinais;

(5) Os três sinais são ortogonais, ou seja, constituem base ortogonal; a base ortonormada também terá $N = 3$ sinais; os sinais de base são obtidos pela normalização dos sinais de entrada: $\{\Phi_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}, \Phi_2 = \frac{s_2}{\|s_2\|}, \Phi_3 = \frac{s_3}{\|s_3\|}\}$; os sinais de entrada serão expressos na forma:

- . $s_1 = \alpha_{11}\Phi_1$;
- . $s_2 = \alpha_{22}\Phi_2$;
- . $s_3 = \alpha_{33}\Phi_3$;

2.3 Interpretação vectorial

Apresenta-se agora a interpretação vectorial da aplicação do procedimento sobre dois sinais s_1 e s_2 , representados aqui através de vectores, na figura 3.

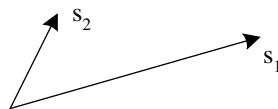


Figura 3: Vectores s_1 e s_2 a analisar.

Note que os sinais s_1 e s_2 não são colineares¹, pelo que será necessário obter dois sinais (vectores) para a base que os representa, designados por p_1 e p_2 , tal como representado na

¹O ângulo relativo $\Theta_{s_1 s_2}$ não é zero.

figura 4. No primeiro caso considera-se s_1 como primeiro sinal, pelo que p_1 e s_1 são colineares e s_2 tem projecção não nula em p_1 e p_2 :

- $s_1 = \|s_1\|p_1$;
- $s_2 = \alpha_{21}p_1 + \|g_2\|p_2$;

No segundo caso, em que se considera primeiro o sinal s_2 tem-se que s_2 e p_1 são colineares, dado que p_1 resulta da normalização de s_2 . O sinal s_1 projecta-se sobre p_1 e p_2 .

- $s_1 = \alpha_{11}p_1 + \|g_2\|p_2$;
- $s_2 = \|s_2\|p_1$;

Desta forma verifica-se que os vectores de base obtidos, são diferentes nas duas situações, tal como os coeficientes de projecção associados a cada sinal.

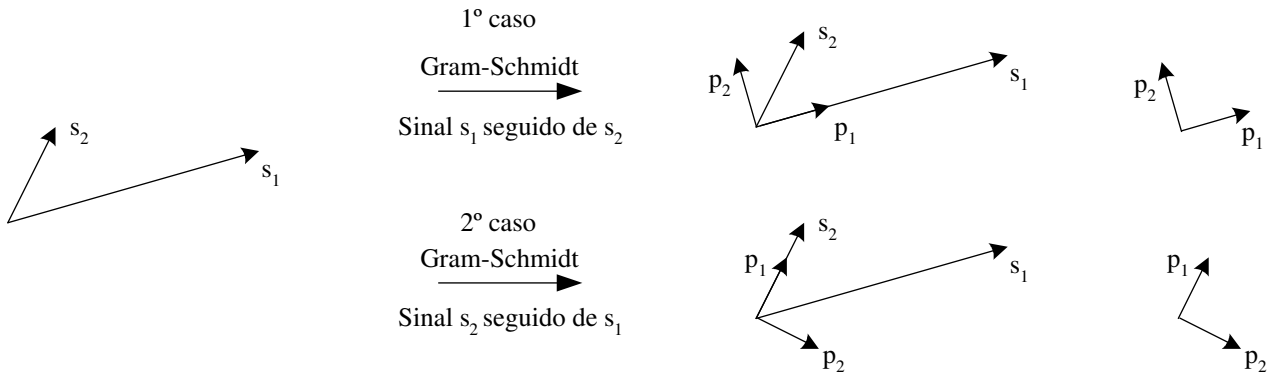


Figura 4: Vectores originais s_1 e s_2 e de base p_1 e p_2 , obtidos em duas aplicações diferentes do procedimento de *Gram-Schmidt*.

2.4 Exemplos de aplicação

Nesta secção apresentam-se exemplos da aplicação do procedimento a diferentes tipos de sinal: contínuos de energia e discretos de potência.

2.4.1 Sinais contínuos de energia

Considere os pulsos rectangulares $s_1(t)$ e $s_2(t)$ (sinais contínuos de energia), apresentados na figura 5, cujas expressões analíticas (compactas) são as seguintes:

$$s_1(t) = 2 \prod\left(\frac{t}{4}\right) \quad s_2(t) = \prod\left(\frac{t-2}{4}\right) \quad (30)$$

Vamos utilizar o procedimento e obter os sinais de uma base ortonormada que representa sem erro estes dois sinais. Começa-se por analisar os dois sinais, representando-os através de vectores. Em seguida aplica-se o procedimento e verificam-se os resultados.

Normas de $s_1(t)$ e $s_2(t)$

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt = \int_{-2}^2 2^2 dt = 16 \quad \rightarrow \quad \|s_1\| = \sqrt{E_{s_1}} = \sqrt{16} = 4 \quad (31)$$

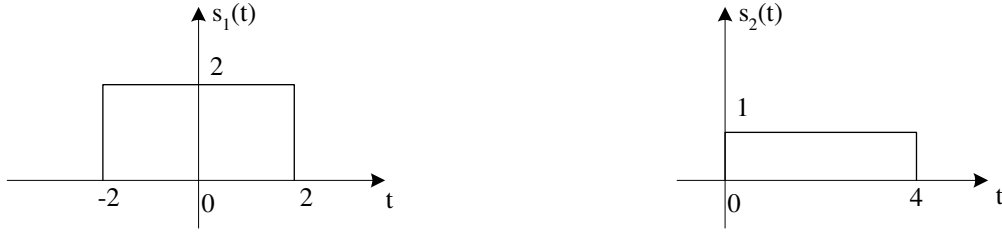


Figura 5: Sinais contínuos de energia $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt = \int_0^4 1^2 dt = 4 \quad \rightarrow \quad \|s_2\| = \sqrt{E_{s_2}} = \sqrt{4} = 2 \quad (32)$$

Produto interno entre $s_1(t)$ e $s_2(t)$

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt = \int_0^2 2 dt = 4 \quad (33)$$

Ângulo relativo entre $s_1(t)$ e $s_2(t)$

$$\Theta_{s_1, s_2} = \arccos \left(\frac{(s_1, s_2)}{\|s_1\| \|s_2\|} \right) = \arccos \left(\frac{4}{4 \cdot 2} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ \quad (34)$$

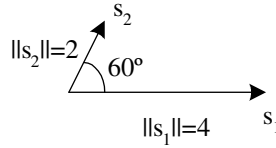


Figura 6: Representação de $s_1(t)$ e $s_2(t)$ através de vectores.

Tendo em conta esta representação vectorial, nomeadamente o ângulo relativo, verifica-se à partida que são necessários dois sinais de base para realizar a representação de $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sem erro de projecção.

Aplicação do procedimento

1. Primeiro sinal de base

$$\Phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1\|} = \frac{s_1(t)}{4} = \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{4} \right) \quad (35)$$

Este é o primeiro sinal de base: $\Phi_1(t)$.

2. Segundo sinal de base

$$\alpha_{21} = (s_2, \Phi_1) = \int_0^2 \frac{1}{2} dt = 1 \quad (36)$$

$$g_2(t) = s_2(t) - \underbrace{\alpha_{21} \Phi_1(t)}_{p_{21}(t)} = s_2(t) - \Phi_1(t) = \Pi \left(\frac{t-2}{4} \right) - \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{4} \right)$$

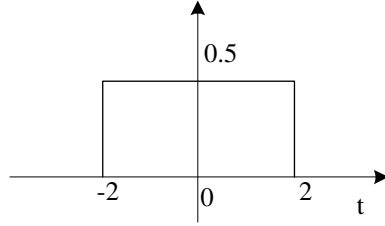


Figura 7: Primeiro sinal de base $\Phi_1(t)$.

$$g_2(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -2 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad (37)$$

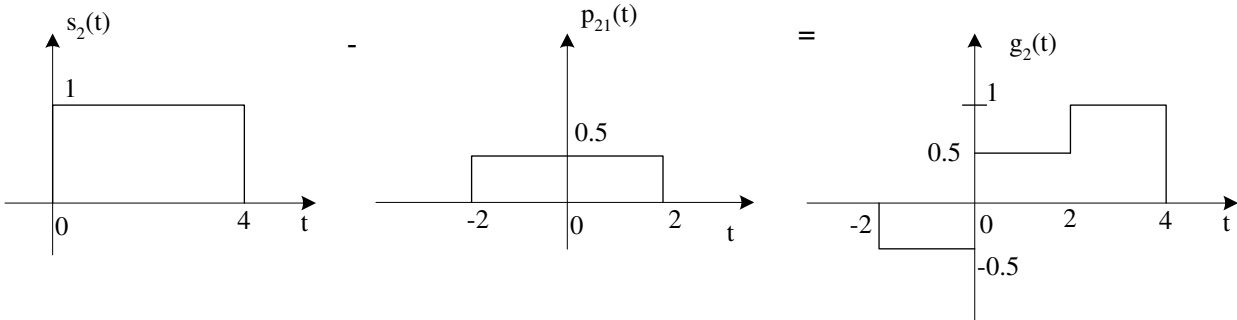


Figura 8: Cálculo do sinal de erro $g_2(t)$.

Normalizando o sinal de erro $g_2(t)$, obtém-se o segundo sinal de base: $\Phi_2(t)$.

$$E_{g_2} = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_2^4 1^2 dt = 3 \quad \rightarrow \quad \|g_2\| = \sqrt{E_{g_2}} = \sqrt{3} \quad (38)$$

$$\Phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\|g_2\|} = \frac{g_2(t)}{\sqrt{3}} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}}, & -2 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}, & 0 < t \leq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad (39)$$

Desta forma, tem-se a base completa com dois sinais $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$, apresentados na figura 10.

Confirmação dos resultados

Os sinais obtidos formam base ortonormada se todos são ortogonais entre si e possuírem norma unitária.

$$(\Phi_m(t), \Phi_l(t)) = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases} \quad (40)$$

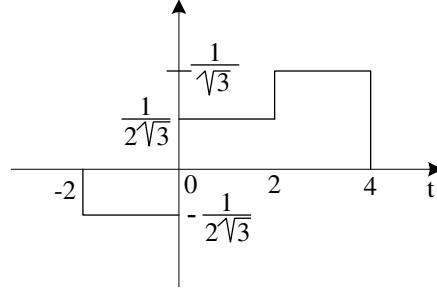


Figura 9: Segundo sinal de base: $\Phi_2(t)$.

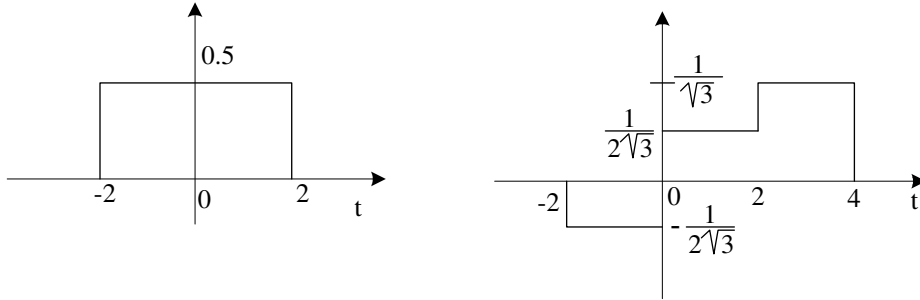


Figura 10: Sinais de base: $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$.

Os sinais da figura 10 verificam esta condição, como a seguir se demonstra:

$$(\Phi_1(t), \Phi_1(t)) = E_{\Phi_1} = \|\Phi_1\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^2(t) dt = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_{-2}^2 \frac{1}{4} dt = 1 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} (\Phi_2(t), \Phi_2(t)) &= E_{\Phi_2} = \|\Phi_2\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2^2(t) dt = \\ &= \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 dt + \int_0^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 dt + \int_2^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 dt = \frac{1}{4 \cdot 3} 2 + \frac{1}{4 \cdot 3} 2 + \frac{1}{3} 2 = 1 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} (\Phi_1(t), \Phi_2(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t)\Phi_2(t) dt = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) dt + \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) dt \\ &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) 2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) 2 = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Os coeficientes de projecção dos sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ obtidos ao longo do procedimento e apresentados nas equações (35), (36) e (38), permitem exprimir estes sinais à custa dos sinais de base:

$$s_1(t) = \|s_1\|\Phi_1(t) + 0\Phi_2(t) = [\|s_1\| \quad 0] \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} = [4 \quad 0] \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$s_2(t) = \alpha_{21}\Phi_1(t) + \|g_2\|\Phi_2(t) = [\alpha_{21} \quad \|g_2\|] \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} = [1 \quad \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

Após a confirmação de que a base é ortonormada, vamos confirmar os coeficientes de projecção dos sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$. Realizando as operações indicadas nas equações (44) e (45) obtêm-se os sinais originais $s_1(t)$ e $s_2(t)$. Por outro lado, os coeficientes de projecção sobre base ortonormada têm determinadas propriedades que podem ser utilizadas para a verificação da correcção do seu valor. Nomeadamente, tal como descrito na equação (21), a energia do sinal pode ser calculada pelos coeficientes de projecção, da seguinte forma:

$$E_{s_1} = \sum_{k=1}^2 \alpha_{1k}^2 = \|s_1\|^2 = 4^2 = 16 \quad (46)$$

$$E_{s_2} = \sum_{k=1}^2 \alpha_{2k}^2 = \alpha_{21}^2 + \|g_2\|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \quad (47)$$

Por comparação com as equações (31) e (32) verifica-se a correcção dos valores dos coeficientes. Os coeficientes de projecção também podem ser utilizados para cálculo do produto interno:

$$(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^2 \alpha_{1k}\alpha_{2k} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{3} = 4 \quad (48)$$

Este cálculo é confirmado pela equação (33).

2.4.2 Representação vectorial

A representação vectorial dos sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sobre o sistema de eixos formado pelos sinais de base apresenta-se na figura 11.

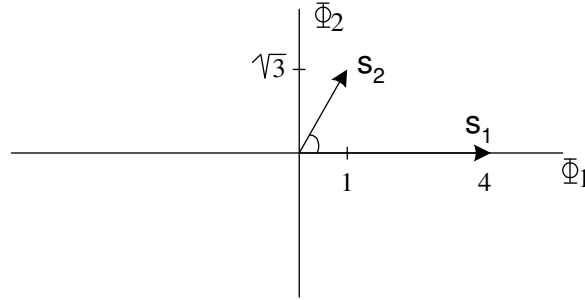


Figura 11: Representação vectorial dos sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sobre o sistema de eixos formado por $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$.

Sobre a representação vectorial, note que o ângulo relativo entre $s_1(t)$ e $s_2(t)$ pode ser calculado através de:

$$\Theta_{s_1 s_2} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ \quad (49)$$

obtendo-se o valor apresentado na equação (34).

A figura 12 representa estes quatro sinais como vectores.

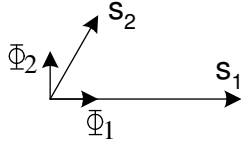


Figura 12: Representação vectorial conjunta dos sinais $s_1(t)$, $s_2(t)$, $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$.

2.4.3 Exemplo de outra base ortonormada

Note que a base apresentada na figura 10 é uma base ortonormada sobre a qual é possível representar os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sem erro. Outra base ortonormada seria obtida se o sinal $s_2(t)$ fosse considerado em primeiro lugar na aplicação do procedimento. Outro exemplo de base ortonormada adequada à representação, sem erro, destes sinais é apresentada na figura 13.

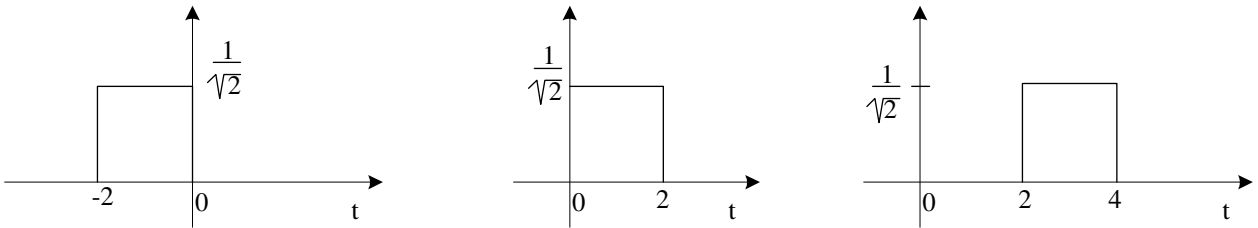


Figura 13: Base ortonormada onde é possível representar sem erro $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

Note que esta base é ortonormada (cumpre a definição apresentada na equação 40), com dimensão 3, ou seja, é constituída por três sinais. Com a aplicação do procedimento de *Gram-Schmidt* obteve-se uma base com dimensão 2, ou seja, com dimensão mínima, tal como sugerido pela representação vectorial da figura 3.

Sobre esta base, de dimensão 3, os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ possuem três coeficientes de projecção que são os seguintes:

Projecção de $s_1(t)$:

$$\alpha_{11} = \text{proj}_{\Phi_1} s_1 = (s_1, \Phi_1) = \int_{-2}^0 2 \frac{1}{\sqrt{2}} dt = 2\sqrt{2} \quad (50)$$

$$\alpha_{12} = \text{proj}_{\Phi_2} s_1 = (s_1, \Phi_2) = \int_0^2 2 \frac{1}{\sqrt{2}} dt = 2\sqrt{2} \quad (51)$$

$$\alpha_{13} = \text{proj}_{\Phi_3} s_1 = (s_1, \Phi_3) = 0 \quad (52)$$

$$s_1(t) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \Phi_3(t) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Projecção de $s_2(t)$:

$$\alpha_{21} = \text{proj}_{\Phi_1} s_2 = (s_2, \Phi_1) = 0 \quad (54)$$

$$\alpha_{22} = \text{proj}_{\Phi_2} s_2 = (s_2, \Phi_2) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2} \quad (55)$$

$$\alpha_{23} = \text{proj}_{\Phi_3} s_2 = (s_2, \Phi_3) = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2} \quad (56)$$

$$s_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \Phi_3(t) \end{bmatrix} \quad (57)$$

Efectuando a verificação dos valores das energias e do produto interno com estes coeficientes de projecção tem-se:

$$E_{s_1} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{1k}^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4.2 + 4.2 = 16 \quad (58)$$

$$E_{s_2} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4 \quad (59)$$

$$(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{1k}\alpha_{2k} = (2\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 4 \quad (60)$$

Confirmando os valores obtidos anteriormente.

2.4.4 Sinais discretos de potência

Apresenta-se agora outro exemplo de cálculo de base ortonormada para três sinais discretos periódicos (tipo potência):

- $s_1[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]$
- $s_2[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]$
- $s_3[n] = (1 + \cos(\pi n))u[n]$

apresentados na figura 14.

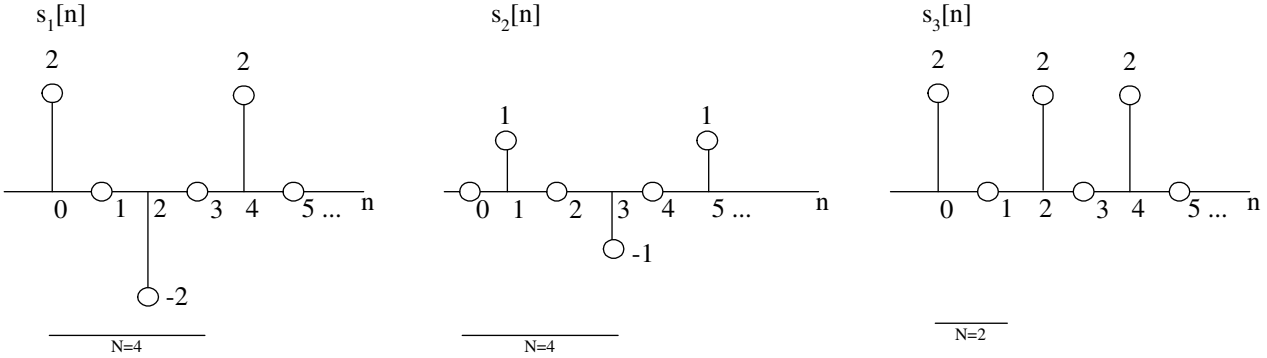


Figura 14: Sinais periódicos discretos $s_1[n]$, $s_2[n]$ e $s_3[n]$.

Normas de $s_1[n]$, $s_2[n]$ e $s_3[n]$

$$P_{s_1} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{4} (2^2 + (-2)^2) = 2 \quad \rightarrow \quad \|s_1\| = \sqrt{P_{s_1}} = \sqrt{2} \quad (61)$$

$$P_{s_2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{4} (1^2 + (-1)^2) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \|s_2\| = \sqrt{P_{s_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (62)$$

$$P_{s_3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 (1 + \cos(\pi n))^2 = \frac{1}{2} (2^2) = 2 \quad \rightarrow \quad \|s_3\| = \sqrt{P_{s_3}} = \sqrt{2} \quad (63)$$

Produtos internos: $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, $(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ e $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3)$

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 s_1[n]s_2[n] = \frac{1}{4}(2.0 + 0.1 - 2.0 + 0.(-1)) = 0 \quad (64)$$

$$(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 s_2[n]s_3[n] = \frac{1}{4}(0.2 + 1.0 + 0.2 + (-1).0) = 0 \quad (65)$$

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 s_1[n]s_3[n] = \frac{1}{4}(2.2 + 0.0 + (-2).2 + 0.0) = 0 \quad (66)$$

Ângulos relativos

Os três sinais são ortogonais entre si, pelo que todos os ângulos relativos valem $\frac{\pi}{2}$.

Cálculo da base ortonormada

Dado que os três sinais são todos ortogonais entre si constituem base ortogonal. Para obter uma base ortonormada, a partir da base ortogonal, basta normalizar cada um destes sinais, não sendo necessário aplicar o procedimento de *Gram-Schmidt*²:

$$\Phi_1[n] = \frac{s_1[n]}{\|s_1\|} = \frac{s_1[n]}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n] \quad (67)$$

$$\Phi_2[n] = \frac{s_2[n]}{\|s_2\|} = \frac{s_2[n]}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n] \quad (68)$$

$$\Phi_3[n] = \frac{s_3[n]}{\|s_3\|} = \frac{s_3[n]}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \cos(\pi n)u[n]}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\pi n)\right) u[n] \quad (69)$$

Projecção dos sinais $\mathbf{s}_1[n]$, $\mathbf{s}_2[n]$ e $\mathbf{s}_3[n]$

Os sinais $s_1[n]$, $s_2[n]$ e $s_3[n]$ são escritos sobre esta base ortonormada $\{\Phi_1[n], \Phi_2[n], \Phi_3[n]\}$ da seguinte forma:

$$s_1[n] = \sqrt{2}\Phi_1[n] + 0\Phi_2[n] + 0\Phi_3[n] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1[n] \\ \Phi_2[n] \\ \Phi_3[n] \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$s_2[n] = 0\Phi_1[n] + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2[n] + 0\Phi_3[n] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1[n] \\ \Phi_2[n] \\ \Phi_3[n] \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$s_3[n] = 0\Phi_1[n] + 0\Phi_2[n] + \sqrt{2}\Phi_3[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1[n] \\ \Phi_2[n] \\ \Phi_3[n] \end{bmatrix} \quad (72)$$

A correcção dos valores destes coeficientes é facilmente verificada através do cálculo da potência realizando de seguida a comparação com os valores apresentados nas equações (61), (62) e (63).

$$P_{s_1} = \sum_{k=1}^3 |\alpha_{1k}|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \quad (73)$$

²A aplicação do procedimento irá conduzir ao mesmo resultado.

$$P_{s_2} = \sum_{k=1}^3 |\alpha_{2k}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (74)$$

$$P_{s_3} = \sum_{k=1}^3 |\alpha_{3k}|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \quad (75)$$

A figura 15 representa os sinais $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$, $\Phi_1[n]$, $\Phi_2[n]$ e $\Phi_3[n]$ através de vectores.

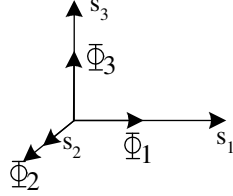


Figura 15: Representação vectorial conjunta de $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$, $\Phi_1[n]$, $\Phi_2[n]$ e $\Phi_3[n]$.

Projectão do sinal $s_4[n] = 2s_1[n] + 3s_3[n]$ na base ortonormada

Tendo em conta que os sinais $s_1[n]$ e $s_3[n]$ são completamente expressos pela base ortonormada, tal como se verifica pelas equações (70) e (72) tem-se imediatamente a projectção do sinal $s_4[n]$:

$$s_4[n] = 2s_1[n] + 3s_3[n] = 2\underbrace{\sqrt{2}\Phi_1[n]}_{s_1[n]} + 3\underbrace{\sqrt{2}\Phi_3[n]}_{s_3[n]} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1[n] \\ \Phi_2[n] \\ \Phi_3[n] \end{bmatrix} \quad (76)$$

Utilizando o cálculo dos coeficientes de projectção e projectando sobre todos os sinais de base tem-se:

$$\alpha_{41} = \text{proj}_{\Phi_1} s_4 = (s_4, \Phi_1) = (2s_1 + 3s_3, \Phi_1) = 2(s_1, \Phi_1) + 3(s_3, \Phi_1) = 2\sqrt{2} + 3 \cdot 0 = 2\sqrt{2} \quad (77)$$

$$\alpha_{42} = \text{proj}_{\Phi_2} s_4 = (s_4, \Phi_2) = (2s_1 + 3s_3, \Phi_2) = 2(s_1, \Phi_2) + 3(s_3, \Phi_2) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \quad (78)$$

$$\alpha_{43} = \text{proj}_{\Phi_3} s_4 = (s_4, \Phi_3) = (2s_1 + 3s_3, \Phi_3) = 2(s_1, \Phi_3) + 3(s_3, \Phi_3) = 2 \cdot 0 + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad (79)$$

Obtendo-se os mesmos coeficientes relativamente à equação (76).

A figura 16 representa os sinais $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$, $s_4[n]$, $\Phi_1[n]$, $\Phi_2[n]$ e $\Phi_3[n]$ através de vectores.

Exercícios relacionados com os sinais apresentados no guia

- 1) Confirme a correcção dos coeficientes de projectção do sinal $s_4[n]$. Calcule a potência do sinal e confirme este valor através dos coeficientes de projectção obtidos;
- 2) Calcule os produtos internos (s_4, s_1) , (s_4, s_2) e (s_4, s_3) utilizando a definição. Realize o mesmo cálculo com os coeficientes de projectção e confirme os resultados obtidos.

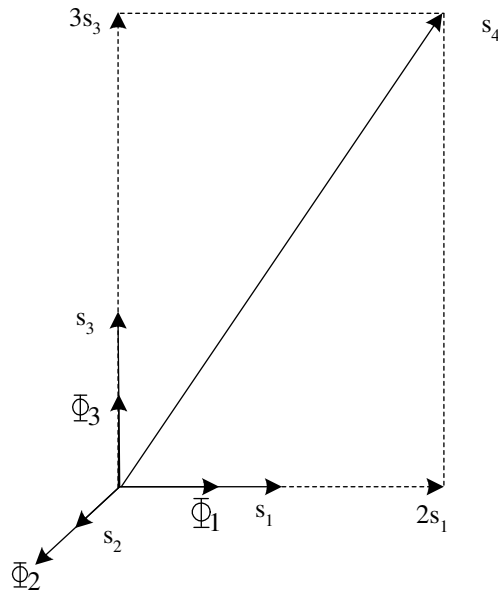


Figura 16: Representação vectorial conjunta de $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$, $s_4[n]$, $\Phi_1[n]$, $\Phi_2[n]$ e $\Phi_3[n]$.

- 3) Qual a base obtida pelo procedimento de *Gram-Schmidt* se fossem apresentados os sinais $s_1[n]$, $s_2[n]$, $s_3[n]$ e $s_4[n]$ e considerados por esta ordem?
- 4) Projecte os sinais $x(t)$ e $y(t)$ na base da figura 10; verifique se existe erro de projecção e caso exista apresente a solução para este problema.

$$x(t) = 4 \prod \left(\frac{t-1}{2} \right) \quad y(t) = \prod \left(\frac{t-4}{4} \right)$$

- 5) Demonstre a equação (20).

Exercícios gerais

- 1) Obtenha uma base ortonormada onde seja possível representar, sem erro, os seguintes sinais:

$$a[n] = 3(u[n] - u[n-4]) \quad b[n] = u[n-2] - u[n-4] \quad c[n] = u[n-2] - u[n-8]$$

- 2) Calcule o ângulo relativo entre os sinais $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \alpha) \quad y(t) = B \cos(2\pi ft + \beta)$$