

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
Engenharia Informática e de Computadores

**Teoria dos Sinais e dos Sistemas**  
**Sistemas lineares e invariantes no tempo**

Artur Ferreira {arturj@cc.isel.ipl.pt}

20 Junho 2005

Versão 1.0

---

**Motivação e Objectivos**

Este documento tem como objectivo apresentar os conceitos básicos sobre sistemas lineares e invariantes no tempo, leccionados na disciplina de Teoria dos Sinais e dos Sistemas. Analisam-se sistemas lineares e invariantes em tempo discreto e contínuo. Apresenta-se a convolução linear discreta, a convolução linear contínua e algumas propriedades mais relevantes. Os sistemas contínuos são também analisados no domínio da frequência, através da resposta em frequência. Trata-se o conceito de filtragem e exemplifica-se a sua aplicação. A consulta deste documento não substitui a bibliografia recomendada [1, 2, 3, 4, 5].

## Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas e sistemas lineares e invariantes no tempo - SLIT</b>	<b>1</b>
2.1	Linearidade e invariância no tempo	1
2.1.1	Linearidade	2
2.1.2	Invariância no tempo	2
2.2	Resposta impulsional	3
2.2.1	Sistemas básicos	3
2.3	Convolução linear discreta	4
2.3.1	Exemplos de cálculo	5
2.3.2	Cálculo matricial	6
2.3.3	Propriedades	7
2.4	Convolução linear contínua	7
2.4.1	Exemplos de cálculo	7
2.4.2	Propriedades	8
2.5	Resposta em frequência	8
2.6	Propriedades dos SLIT	9
2.6.1	Exemplos - sistemas básicos	10
2.6.2	Exemplos - filtros	10
2.7	Associação de SLIT	10
2.7.1	Associação série (cascata)	10
2.7.2	Associação paralelo	11
<b>3</b>	<b>Análise de SLIT</b>	<b>12</b>
3.1	SLIT contínuo	12
3.2	SLIT contínuo - filtro passa baixo	12
3.3	SLIT contínuo - associação paralelo de filtros passa baixo	12
3.4	Sistema RC de 1ª ordem (passa-baixo)	13
3.5	Sistema CR de 1ª ordem (passa-alto)	14
3.6	Associação Série RC/CR (passa-banda)	15
<b>4</b>	<b>Utilização do MATLAB</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Exercícios propostos</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Alguns <i>links</i> interessantes</b>	<b>18</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>18</b>
A.1	Matriz de <i>Toeplitz</i>	18
A.2	Convolução no tempo/multiplicação na frequência	18

# 1 Introdução

Este documento resume os conceitos de sistemas contínuos e discretos tratados na disciplina de Teoria dos Sinais e dos Sistemas, posteriormente utilizados na disciplina de Processamento Digital de Sinal I. Na secção 2, apresentam-se os conceitos de sistema e de sistema linear e invariante no tempo. Abordam-se sistemas contínuos e discretos e trata-se a convolução linear discreta e contínua. Na secção 3 analisam-se SLIT discretos e contínuos, nos domínios do tempo e da frequência. A secção 4 apresenta a análise de SLIT através de MATLAB. Na secção 5 propõem-se exercícios e finalmente, a secção 6 lista os endereços de algumas páginas WEB que abordam estes tópicos.

## 2 Sistemas e sistemas lineares e invariantes no tempo - SLIT

Define-se sistema como uma entidade que transforma um sinal (ou mais) noutra. Considerando sistemas com uma entrada e uma saída, do ponto de vista matemático tem-se

$$y = S(x),$$

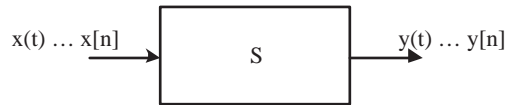
em que  $x$  é o sinal de entrada,  $y$  é o sinal de saída e  $S$  é a função que representa o sistema. Por exemplo, para sistemas contínuos, temos

$$y(t) = S(x(t)),$$

enquanto que para sistemas discretos se verifica

$$y[n] = S(x[n]).$$

A figura 2 apresenta o diagrama de blocos genérico de um sistema, na qual se evidencia que o diagrama é válido para sistemas discretos e contínuos.



São exemplos de sistemas contínuos de uma entrada e uma saída as seguintes transformações:

- $y(t) = x^2(t)$ .
- $y(t) = |x(t)|$ .
- $y(t) = 2x(t)$ .
- $y(t) = 2x(t - 5)$ .

Os mesmos sistemas no domínio discreto são dados por:

- $y[n] = x^2[n]$ .
- $y[n] = |x[n]|$ .
- $y[n] = 2x[n]$ .
- $y[n] = 2x(t - 5)$ .

Considerando sistemas com mais do que uma entrada temos, por exemplo:

- $w[n] = ax[n] + by[n] + cz[n]$ .
- $z(t) = x(t) \times y(t) + 1$ .

### 2.1 Linearidade e invariância no tempo

Caso determinado sistema possua as propriedades de linearidade e invariância no tempo, designa-se por sistema linear e invariante no tempo (SLIT) [1, 2, 3, 4, 5]. Os SLIT constituem uma sub-classe dos sistemas.

### 2.1.1 Linearidade

Determinado sistema é **linear** se verificar

$$S(a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_Nx_N(t)) = a_1S(x_1(t)) + a_2S(x_2(t)) + \dots + a_NS(x_N(t)), \quad (1)$$

ou seja, a aplicação do sistema sobre uma combinação linear de sinais resulta num sinal de saída que consiste na combinação linear das respostas a esses sinais [1, 2, 3, 4, 5]. Verifica-se assim que a transformação sobre a soma de sinais corresponde à soma das transformações individuais. A equação (1) pode ser escrita de forma compacta

$$S\left(\sum_{k=1}^N a_k x_k(t)\right) = \sum_{k=1}^N a_k S(x_k(t)). \quad (2)$$

A figura 1 ilustra a linearidade, de acordo com a equação (2). Os dois diagramas representam ambos os termos da equação (2).

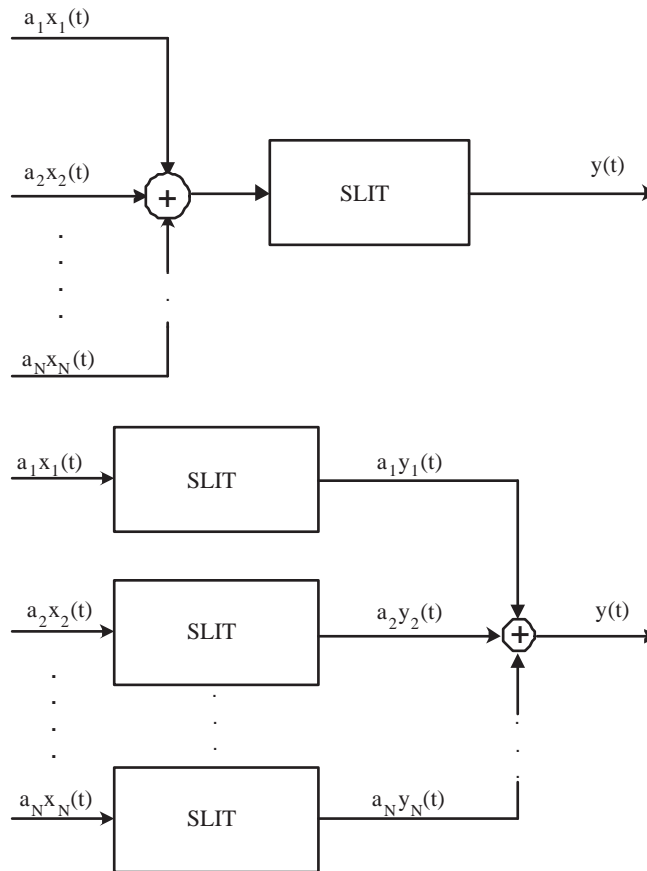


Figura 1: Ilustração da linearidade.

### 2.1.2 Invariância no tempo

Determinado sistema responde ao sinal de entrada  $x(t)$  com  $y(t) = S(x(t))$ . Caso o sistema seja **invariante no tempo**, a sua resposta ao sinal  $x(t - b)$  é  $y(t - b) = S(x(t - b))$ , tal como se resume de seguida. Se

$$x(t) \xrightarrow[S]{} y(t),$$

então

$$x(t - b) \xrightarrow[S]{} y(t - b).$$

Verifica-se assim que o sistema responde com o mesmo sinal com o atraso (ou avanço) correspondente ao do sinal de entrada. A figura 2 ilustra a invariância no tempo.

Os SLIT constituem uma sub-classe dos sistemas, sendo caracterizados pela resposta impulsional e pela resposta em frequência, discutidas nas secções 2.2 e 2.5, respectivamente.

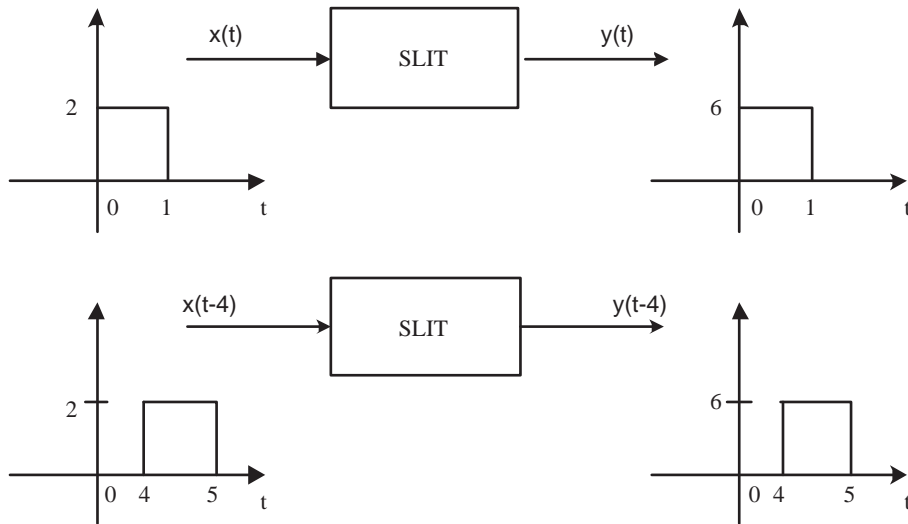


Figura 2: Ilustração da invariância no tempo.

## 2.2 Resposta impulsional

A resposta impulsional, tal como o nome indica, constitui a resposta do SLIT ao impulso [1, 2, 3, 4, 5]. Considerando um SLIT discreto, tem-se a definição de resposta impulsional:

$$h[n] = y[n], \quad \text{quando } x[n] = \delta[n]. \quad (3)$$

No caso de SLIT contínuo, tem-se

$$h(t) = y(t), \quad \text{quando } x(t) = \delta(t). \quad (4)$$

Verifica-se que a resposta impulsional é o sinal presente na saída do SLIT, quando na entrada se apresenta o impulso unitário ou o impulso delta-dirac, para SLIT discreto e contínuo, respectivamente. A resposta impulsional caracteriza o comportamento do SLIT, relativamente aos ganhos e atrasos impostos ao sinal de entrada. Considerando o SLIT discreto representado pelo diagrama de blocos da figura 3, a expressão do sinal de saída é

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-2] + 5x[n-3].$$

Aplicando a definição de resposta impulsional, apresentada na equação (3) tem-se

$$h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-2] + 5\delta[n-3].$$

Relativamente à figura 3, note-se a correspondência entre os pontos da resposta impulsional e os blocos constituintes do SLIT.

### 2.2.1 Sistemas básicos

A tabela 1 apresenta respostas impulsionais de sistemas básicos. A figura 4 apresenta os diagramas de blocos

SLIT	$h[n]$	$h(t)$
Identidade	$\delta[n]$	$\delta(t)$
Amplificador	$a\delta[n]$	$a\delta(t)$
Atraso	$\delta[n-k]$	$\delta(t-b)$
Amplificador e atraso	$a\delta[n-k]$	$a\delta(t-b)$

Tabela 1: Respostas impulsionais de SLIT básicos, nos domínios discreto e contínuo.

correspondentes.

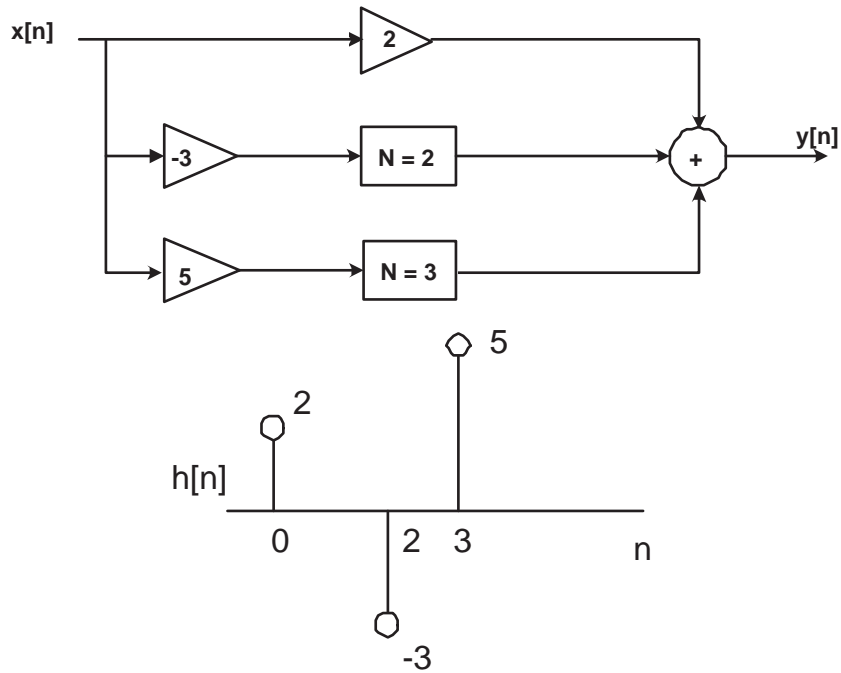


Figura 3: Exemplo de SLIT (diagrama de blocos) e respectiva resposta impulsional.

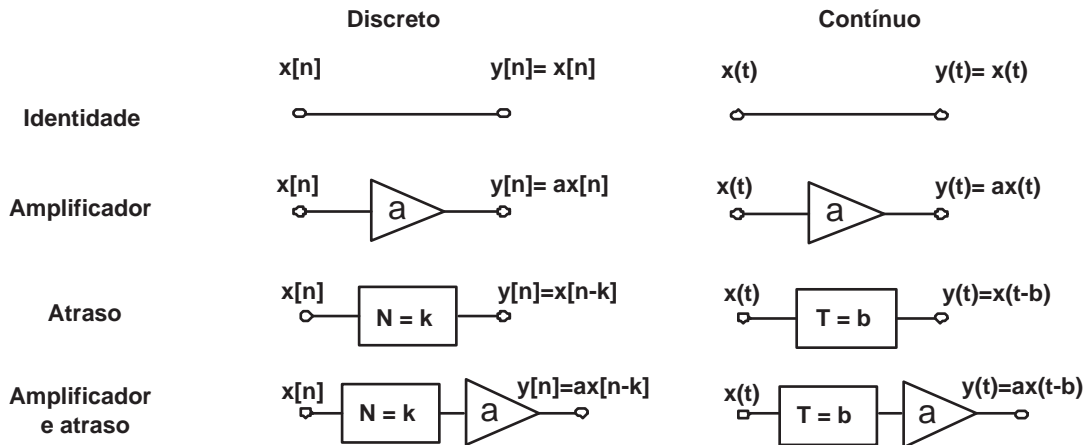


Figura 4: Diagrama de blocos de SLIT básicos.

### 2.3 Convolução linear discreta

No cálculo da saída que determinado SLIT apresenta para um dado sinal de entrada é útil recorrer à resposta impulsional do SLIT. A **convolução linear** [2, 3, 4, 5] entre o sinal de entrada e a resposta impulsional obtém o sinal de saída. Vamos deduzir a expressão de cálculo da convolução linear discreta. A tabela 2 apresenta pares sinal de entrada/sinal de saída, válidos para qualquer SLIT. No cálculo das expressões dos sinais de saída,

Entrada	Saída
$\delta[n]$	$h[n]$
$a\delta[n]$	$ah[n]$
$a\delta[n-k]$	$ah[n-k]$

Tabela 2: Resposta de SLIT a determinados sinais de entrada.

faz-se uso da definição de resposta impulsional e da invariância no tempo.

Tendo em conta que qualquer sinal discreto  $x[n]$  pode ser escrito à custa da soma de amostras unitárias

ponderadas e deslocadas

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k], \quad (5)$$

individualizando as parcelas do somatório tem-se

$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots$$

Desta forma, atendendo à linearidade, o sinal à saída tem a expressão

$$y[n] = \dots + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \dots \quad (6)$$

A equação (6), escrita de forma compacta é

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (7)$$

e designa-se por **somatório de convolução linear** entre  $x[n]$  e  $h[n]$ . Verifica-se assim que em cada instante, a amostra na saída do sistema é dada através do produto interno entre dois sinais

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \langle x[k], h[n-k] \rangle. \quad (8)$$

A tabela 3 exemplifica o cálculo de alguns pontos do sinal  $y[n]$ , evidenciando a aplicação do produto interno no cálculo de cada amostra do sinal de saída.

n	$y[n]$
...	...
-2	$\langle x[k], h[-2-k] \rangle$
-1	$\langle x[k], h[-1-k] \rangle$
0	$\langle x[k], h[0-k] \rangle$
1	$\langle x[k], h[1-k] \rangle$
2	$\langle x[k], h[2-k] \rangle$
...	...

Tabela 3: Cálculo de pontos da convolução linear - relação com o produto interno.

### 2.3.1 Exemplos de cálculo

Por exemplo, considere-se o sinal  $x[n] = 3\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$  aplicado na entrada do SLIT apresentado na figura 3, cuja resposta impulsional é  $h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-2] + 5\delta[n-3]$ . Verifica-se assim o cálculo das amostras do sinal de saída, apresentado na tabela 4. A figura 5 ilustra o cálculo dos pontos da convolução linear.

n	$y[n]$
0	$\langle x[k], h[0-k] \rangle = 3 \times 2 = 6$
1	$\langle x[k], h[1-k] \rangle = 4 \times 2 = 8$
2	$\langle x[k], h[2-k] \rangle = 3 \times (-3) + 1 \times 2 = -7$
3	$\langle x[k], h[3-k] \rangle = 4 \times (-3) + 3 \times 5 = 3$
4	$\langle x[k], h[4-k] \rangle = 4 \times 5 + 1 \times (-3) = 17$
5	$\langle x[k], h[5-k] \rangle = 1 \times 5 = 5$

Tabela 4: Exemplo de cálculo de pontos da convolução linear.

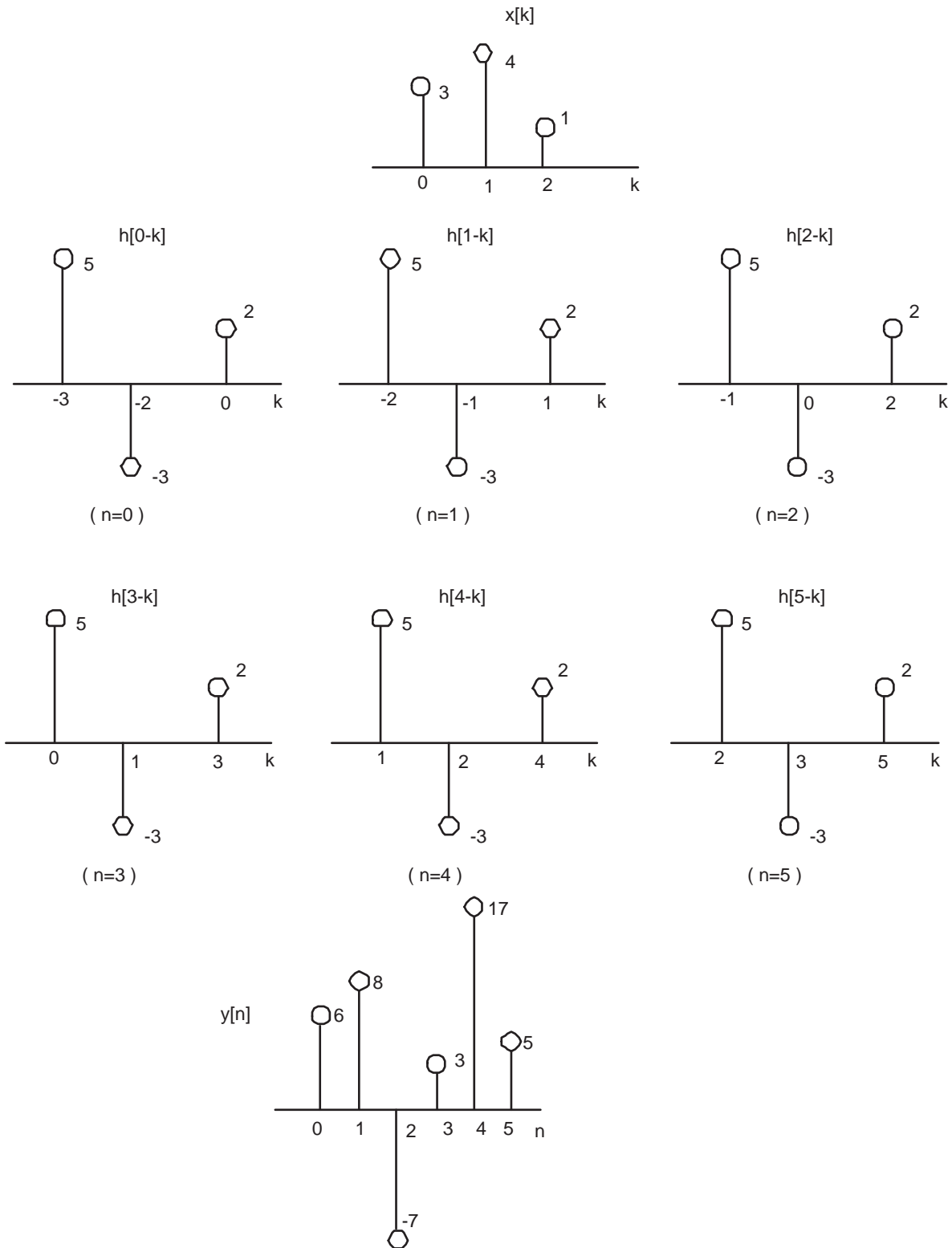


Figura 5: Cálculo da convolução linear entre  $x[n] = 3\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$  e  $h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-2] + 5\delta[n-3]$ .

### 2.3.2 Cálculo matricial

A convolução linear pode ser calculada através do produto matricial entre a matriz de Toeplitz (ver apêndice A.1), construída a partir das amostras de um sinal, e o vetor que contém as amostras do outro sinal. Retomando o

exemplo anterior, apresentado na tabela 4 e na figura 5 tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -7 \\ 3 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Dado que a convolução linear é comutativa (ver secção seguinte), verifica-se ainda que o cálculo anterior pode ser realizado de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -7 \\ 3 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.3 Propriedades

Sejam  $x[n]$  e  $y[n]$  dois sinais discretos com  $l_x$  e  $l_y$  amostras, respectivamente. A primeira amostra não nula de cada sinal é  $I_x$  e  $I_y$ , respectivamente. A convolução entre estes sinais produz o sinal  $z[n] = x[n] * y[n]$ , o qual possui as seguintes propriedades [2, 3, 4, 5]:

- A amostra inicial não nula de  $z[n]$  é dada por  $I_z = I_x + I_y$ .
- O número de amostras de  $z[n]$  é  $l_z = l_x + l_y - 1$ .

A convolução linear verifica também as propriedades [2, 3, 4, 5]:

- Comutativa:  $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$ .
- Associativa:  $(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
- Distributiva em relação à adição:  $x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$ .
- O dirac (amostra unitária) constitui o elemento neutro:  $x[n] * \delta[n] = x[n]$ .
- A convolução de um sinal  $x[n]$  com o dirac ponderado e deslocado  $a\delta[n-b]$  resulta no sinal  $x[n]$  ponderado e deslocado pelos mesmos factores:  $x[n] * a\delta[n-b] = ax[n-b]$ .

## 2.4 Convolução linear contínua

A convolução linear contínua define-se de forma semelhante à convolução linear discreta. Atendendo a que qualquer sinal contínuo pode ser expresso através de

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda) d\lambda, \quad (9)$$

tem-se que a convolução linear contínua é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda) d\lambda. \quad (10)$$

Note-se a correspondência entre estas expressões e as respectivas no domínio discreto, apresentadas nas equações (5) e (7), respectivamente.

### 2.4.1 Exemplos de cálculo

Considere os dois pulsos rectangulares, definidos por  $x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$  e  $h(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$ , apresentados na figura 6. A figura 7 ilustra o cálculo da convolução linear contínua entre estes sinais. Verifica-se que o sinal resultante da convolução tem a expressão  $y(t) = 2\Lambda\left(\frac{t-1}{1}\right) = 2\Lambda(t-1)$ .



Figura 6: Pulsos rectangulares.

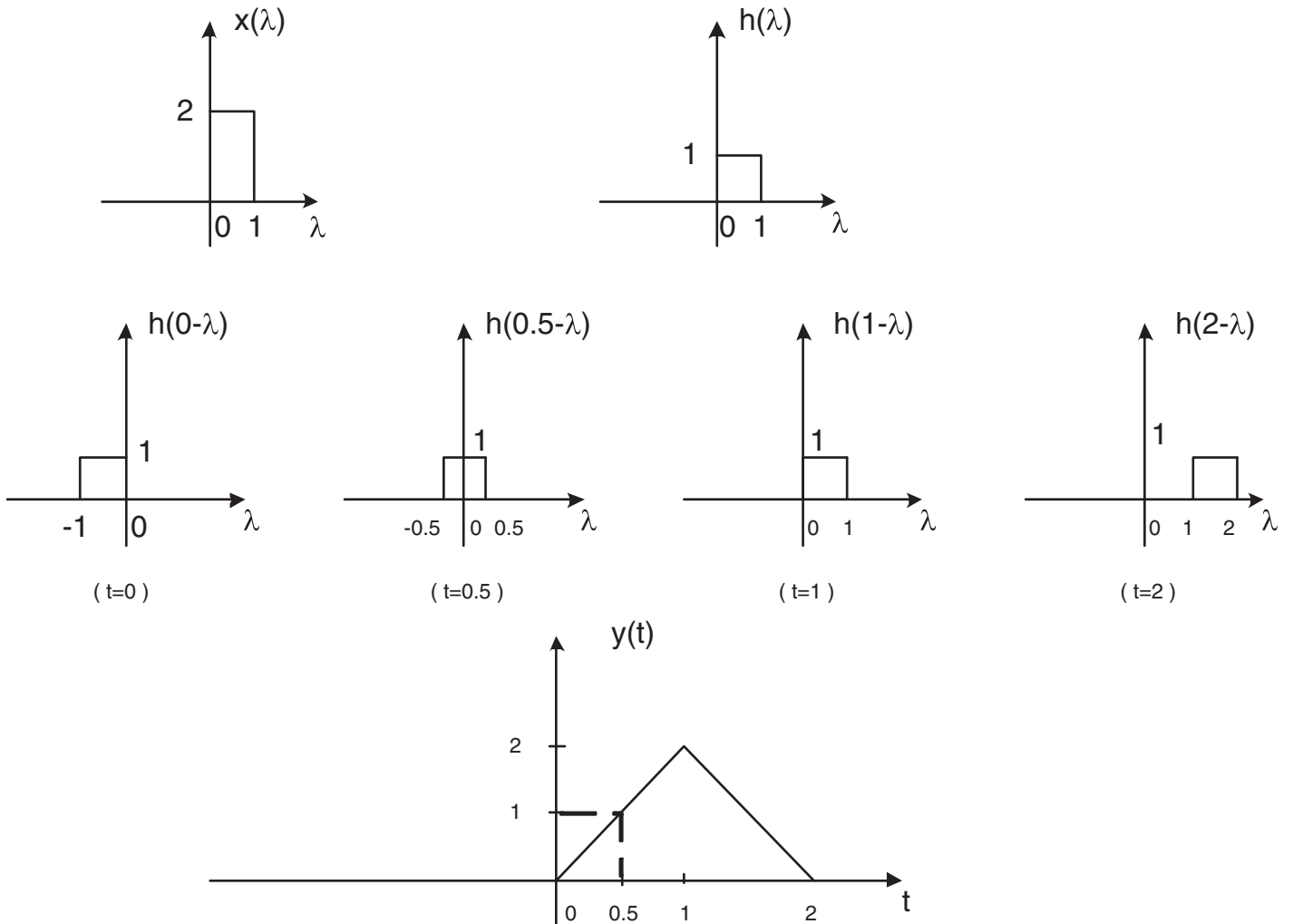


Figura 7: Cálculo da convolução linear contínua entre  $x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$  e  $h(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$ .

### 2.4.2 Propriedades

A convolução linear contínua possui propriedades idênticas à da convolução linear discreta, com a diferença de que na convolução entre dois sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  de durações  $T_x$  e  $T_y$  tem-se que  $z(t) = x(t) * y(t)$  tem duração  $T_z = T_x + T_y$ .

## 2.5 Resposta em frequência

A figura 8 mostra o diagrama de blocos de um SLIT. A resposta em frequência<sup>1</sup> do SLIT é a transformada de

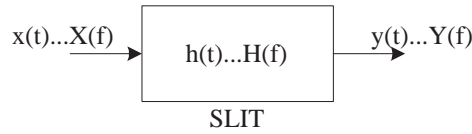


Figura 8: Diagrama de blocos de sistema linear e invariante no tempo.

Fourier da resposta impulsional

$$H(f) = TF[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (11)$$

A transformada de Fourier aplicada sobre a convolução linear corresponde ao produto dos espectros [4, 5], pelo que

$$Y(f) = TF[x(t) * h(t)] = TF[x(t)]TF[h(t)] = X(f)H(f). \quad (12)$$

Esta propriedade está demonstrada no apêndice A.2. Estabelecem-se assim as relações input/output para SLIT contínuo, nos domínios do tempo e da frequência

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad Y(f) = X(f)H(f). \quad (13)$$

Dado que  $H(f)$  é um sinal complexo, a equação (12) pode ser separada em módulo e argumento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |Y(f)| &= |X(f)||H(f)| \\ \arg[Y(f)] &= \arg[X(f)] + \arg[H(f)]. \end{aligned} \quad (14)$$

O módulo traduz o ganho que o sistema introduz, enquanto que o argumento representa o desfasamento introduzido em cada frequência. Atendendo às propriedades da transformada de Fourier, verifica-se que qualquer sinal real no tempo apresenta simetria complexa na frequência. Logo,  $H(f)$  apresenta simetria complexa, pelo que  $|H(f)|$  tem simetria par, enquanto  $\arg[H(f)]$  tem simetria ímpar.

## 2.6 Propriedades dos SLIT

Os SLIT possuem as seguintes propriedades:

1. **Não geram novas frequências** - analisando a equação (12) verifica-se que o espectro de saída resulta do produto do espectro de entrada pela resposta em frequência, logo todas as frequências que constam do espectro  $Y(f)$ , devem constar do espectro  $X(f)$ .
2. **São filtros** - pelos mesmos motivos da propriedade anterior, apenas é possível remover (filtrar) componentes de frequência do sinal de entrada.
3. **Uma sinusóide na entrada produz na saída outra sinusóide da mesma frequência**, amplificada e deslocada.

Relativamente à terceira propriedade, considere-se que na entrada do sistema se apresenta

$$x(t) = A \cos(2\pi f_o t + \phi),$$

cujos espectro é dado por

$$X(f) = \frac{A}{2} \exp(j\phi)\delta(f - f_o) + \frac{A}{2} \exp(-j\phi)\delta(f + f_o).$$

Aplicando a relação input/output tem-se

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) = \left( \frac{A}{2} \exp(j\phi)\delta(f - f_o) + \frac{A}{2} \exp(-j\phi)\delta(f + f_o) \right) H(f) \\ &= \frac{A}{2} \exp(j\phi)H(f_o)\delta(f - f_o) + \frac{A}{2} \exp(-j\phi)H(-f_o)\delta(f + f_o) \\ &= \frac{A}{2} |H(f_o)| \exp(j(\phi + \arg[H(f_o)]))\delta(f - f_o) \\ &\quad + \frac{A}{2} |H(-f_o)| \exp(-j(\phi - \arg[H(-f_o)]))\delta(f + f_o). \end{aligned} \quad (15)$$

<sup>1</sup>Neste documento, e no contexto da unidade curricular TSS, analisamos apenas a resposta em frequência para SLIT no domínio contínuo.

Dado que  $|H(-f_o)| = |H(f_o)|$  (simetria par) e  $\arg[H(f_o)] = -\arg[H(-f_o)]$  (simetria ímpar) tem-se

$$Y(f) = \frac{A}{2}|H(f_o)| \exp(j(\phi + \arg[H(f_o)]))\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}|H(f_o)| \exp(-j(\phi + \arg[H(f_o)]))\delta(f + f_o). \quad (16)$$

Verifica-se assim, que o sinal na saída do sistema terá a expressão

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}|H(f_o)| \exp(j(\phi + \arg[H(f_o)])) \exp(j2\pi f_o t) + \frac{A}{2}|H(f_o)| \exp(-j(\phi + \arg[H(f_o)])) \exp(-j2\pi f_o t) \\ &= \frac{A}{2}|H(f_o)| (\exp(j(2\pi f_o t + \phi + \arg[H(f_o)])) + \exp(-j(2\pi f_o t + \phi + \arg[H(f_o)]))) \\ &= \frac{A}{2}|H(f_o)| 2 \cos(2\pi f_o t + \phi + \arg[H(f_o)]) \\ &= A|H(f_o)| \cos(2\pi f_o t + \phi + \arg[H(f_o)]). \end{aligned} \quad (17)$$

Analisando a expressão obtida para  $y(t)$  verifica-se que este é obtido à custa de **amplificação** (ou atenuação) dada por  $|H(f_o)|$  e **deslocamento** (avanço ou atraso), definido por  $\arg[H(f_o)]$ , sobre  $x(t)$ .

### 2.6.1 Exemplos - sistemas básicos

Na tabela 5 apresentam-se as respostas impulsivas e as respectivas respostas em frequência de determinados SLIT básicos. Para o SLIT cuja resposta em frequência é  $H(f) = a \exp(-j2\pi fb)$ , tem-se que o módulo da

Nome	$h(t)$	$H(f)$
Identidade	$\delta(t)$	1
Amplificador	$a\delta(t)$	$a$
Amplificador e atraso	$a\delta(t - b)$	$a \exp(-j2\pi fb)$

Tabela 5: Resposta impulsional e em frequência de SLIT básicos.

resposta em frequência é  $|H(f)| = |a|$  e  $\arg[H(f)] = -2\pi fb$ . Este SLIT apresenta ganho constante para todas as frequências e desfasamento que depende da frequência. Por exemplo, com  $a = 3$  e  $b = \frac{1}{2}$ , tem-se  $H(f) = 3 \exp(-j\pi f)$ .

### 2.6.2 Exemplos - filtros

A tabela 6 apresenta três exemplos de SLIT, com a respectiva resposta impulsional e resposta em frequência, evidenciando diferentes tipos de filtragem.

Sistema	$h(t)$	$H(f)$
Amplificador com atraso	$5\delta(t - 7)$	$5 \exp(-j2\pi f7)$
Filtro passa-baixo	$200\text{sinc}(200t)$	$\Pi\left(\frac{f}{200}\right)$
Filtro passa-alto	$\delta(t) - 200\text{sinc}(200t)$	$1 - \Pi\left(\frac{f}{200}\right)$

Tabela 6: Resposta impulsional e em frequência de SLIT - exemplos.

## 2.7 Associação de SLIT

Nesta secção, consideram-se associações básicas de SLIT. Analisam-se as respostas impulsivas e em frequência equivalentes.

### 2.7.1 Associação série (cascata)

A figura 9 apresenta o diagrama da associação em série (ou cascata) de vários SLIT. Relativamente à associação série verifica-se que

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t) = x(t) * \underbrace{h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t)}_{h_{eq}(t)}, \quad (18)$$

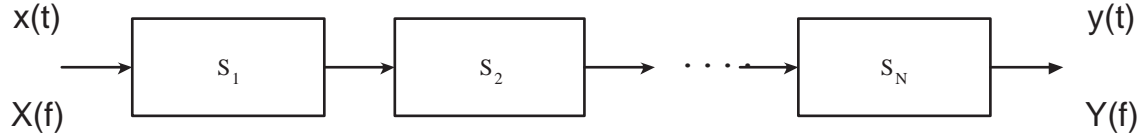


Figura 9: Diagrama da associação série.

ou seja, a resposta impulsional equivalente da associação série é definida pela convolução das respostas impulsionais dos sistemas associados. Dado que a convolução no tempo corresponde ao produto no domínio da frequência, tem-se

$$Y(f) = X(f)(H_1(f)H_2(f) \dots H_N(f)) = X(f) \underbrace{H_1(f)H_2(f) \dots H_N(f)}_{H_{eq}(f)}, \quad (19)$$

verificando-se que a resposta em frequência equivalente para a associação série corresponde ao produto das respostas em frequência. No caso de sinais e sistemas discretos a equação (18) toma a forma

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_N[n] = x[n] * \underbrace{h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_N[n]}_{h_{eq}[n]}. \quad (20)$$

### 2.7.2 Associação paralelo

A figura 10 apresenta o diagrama da associação em paralelo de vários SLIT. Efectuando análise idêntica à

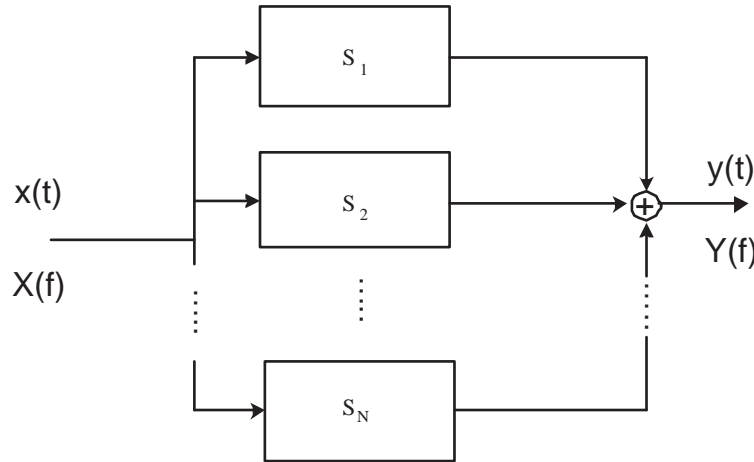


Figura 10: Diagrama da associação paralelo.

anterior, sobre a associação paralelo, obtém-se no domínio do tempo

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) + \dots + x(t) * h_N(t) = x(t) * \underbrace{(h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_N(t))}_{h_{eq}(t)}. \quad (21)$$

No domínio da frequência a expressão correspondente é

$$Y(f) = X(f)H_1(f) + X(f)H_2(f) + \dots + X(f)H_N(f) = X(f) \underbrace{(H_1(f) + H_2(f) + \dots + H_N(f))}_{H_{eq}(f)}. \quad (22)$$

Conclui-se que na associação paralelo, a resposta impulsional equivalente corresponde à soma das respostas impulsionais, tal como a resposta em frequência equivalente corresponde à soma das respostas em frequência. Note-se que para sinais e sistemas discretos a equação (21) toma a forma

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] + \dots + x[n] * h_N[n] = x[n] * \underbrace{(h_1[n] + h_2[n] + \dots + h_N[n])}_{h_{eq}[n]}. \quad (23)$$

### 3 Análise de SLIT

Nesta secção exploram-se as propriedades dos SLIT, com ênfase na resposta em frequência e na separação desta em módulo e fase.

#### 3.1 SLIT contínuo

Seja  $x(t) = 2\Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$  o sinal de entrada no SLIT cuja resposta impulsional é  $h(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5}{1}\right)$ . Calculando a convolução linear entre estes dois sinais tem-se o sinal  $y(t)$  presente na saída do SLIT. Este resultado foi apresentado na secção 2.4. Analisando estes sinais no domínio da frequência tem-se

$$X(f) = TF[x(t)] = 2\text{sinc}(f) \exp(-j2\pi f 0.5) = 2\text{sinc}(f) \exp(-j\pi f)$$

e

$$H(f) = TF[h(t)] = \text{sinc}(f) \exp(-j2\pi f 0.5) = \text{sinc}(f) \exp(-j\pi f),$$

pelo que

$$Y(f) = 2\text{sinc}(f) \exp(-j\pi f) \text{sinc}(f) \exp(-j\pi f) = 2\text{sinc}^2(f) \exp(-j2\pi f).$$

Verifica-se que  $Y(f)$  corresponde à transformada de Fourier de  $y(t) = 2\Lambda(t-1)$ , determinado pela convolução linear, na secção 2.4.

#### 3.2 SLIT contínuo - filtro passa baixo

Como exemplo, admita-se que determinado SLIT tem resposta em frequência  $H(f) = 2\Pi\left(\frac{f}{50}\right)$ . Apresenta-se o sinal  $x(t) = 2 + \cos(2\pi 10t) + 3 \cos(2\pi 20t) + \cos(2\pi 100t)$ , na entrada do sistema. Verifica-se que

$$X(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+10) + \frac{3}{2}\delta(f-20) + \frac{3}{2}\delta(f+20) + \frac{1}{2}\delta(f-100) + \frac{1}{2}\delta(f+100).$$

O espectro do sinal de saída é

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) = X(f)2\Pi\left(\frac{f}{50}\right) \\ &= 4\delta(f) + \delta(f-10) + \delta(f+10) + 3\delta(f-20) + 3\delta(f+20). \end{aligned} \quad (24)$$

Logo, a expressão do sinal de saída é  $y(t) = 4 + 2 \cos(2\pi 10t) + 6 \cos(2\pi 20t)$ .

#### 3.3 SLIT contínuo - associação paralelo de filtros passa baixo

Considerando  $H(f) = 2\Pi\left(\frac{f}{50}\right) + 2\Pi\left(\frac{f}{100}\right)$ , cujo esboço se apresenta na figura 11, o comportamento do sistema é descrito da seguinte forma:

- . rejeita (remove) sinais com frequência igual ou superior a 50 Hz;
- . na banda  $[25, 50[$  Hz apresenta ganho (módulo) de 2, ou seja, comporta-se como amplificador de ganho 2 para sinais nesta banda;
- . na banda  $[0, 25[$  Hz apresenta ganho 4.

Verifica-se ainda que o SLIT tem fase nula. Apresenta-se o sinal  $x(t) = -1 + \cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{4}) + 4 \sin(2\pi 30t) -$

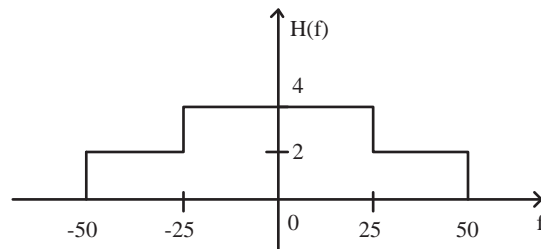


Figura 11: Resposta em frequência de SLIT.

$\cos(2\pi 70t)$ , na entrada do sistema. Seguindo procedimento idêntico ao do exemplo anterior, verifica-se que a expressão do sinal de saída é  $y(t) = -4 + 4 \cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{4}) + 8 \sin(2\pi 30t) -$

### 3.4 Sistema RC de 1ª ordem (passa-baixo)

A figura 12 representa o sistema RC de 1ª ordem. Analisando a equação (12) tem-se

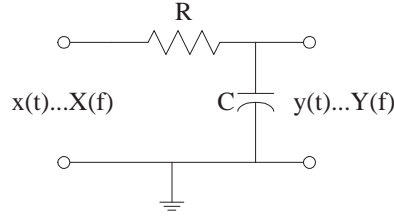


Figura 12: Sistema RC de 1ª ordem.

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}.$$

Atendendo a que a resposta em frequência do condensador é dada por  $Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C}$ , tem-se que a resposta em frequência do circuito RC é dada por

$$H_{RC}(f) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}.$$

A resposta impulsional é

$$h_{RC}(t) = TF^{-1} \left[ \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \right] = TF^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \right] = \frac{1}{RC} TF^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \right] = \frac{1}{RC} \exp \left( -\frac{1}{RC} t \right) u(t).$$

Efectuando a separação de  $H_{RC}(f)$  em módulo e fase, vem para o módulo

$$|H_{RC}(f)| = \frac{|1|}{|1 + j2\pi f RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}},$$

enquanto a fase é dada por

$$\arg[H_{RC}(f)] = \arg[1] - \arg[1 + j2\pi f RC] = 0 - \operatorname{atan} \left( \frac{2\pi f RC}{1} \right) = -\operatorname{atan}(2\pi f RC).$$

A figura 13 mostra o módulo  $|H_{RC}(f)|$  e a fase  $\arg[H_{RC}(f)]$  do sistema, considerando  $R = 4.7 \text{ K}\Omega$  e  $C = 22 \text{ nF}$ . A tabela 7 mostra o valor do módulo  $|H_{RC}(f)|$  e da fase  $\arg[H_{RC}(f)]$  para várias frequências.

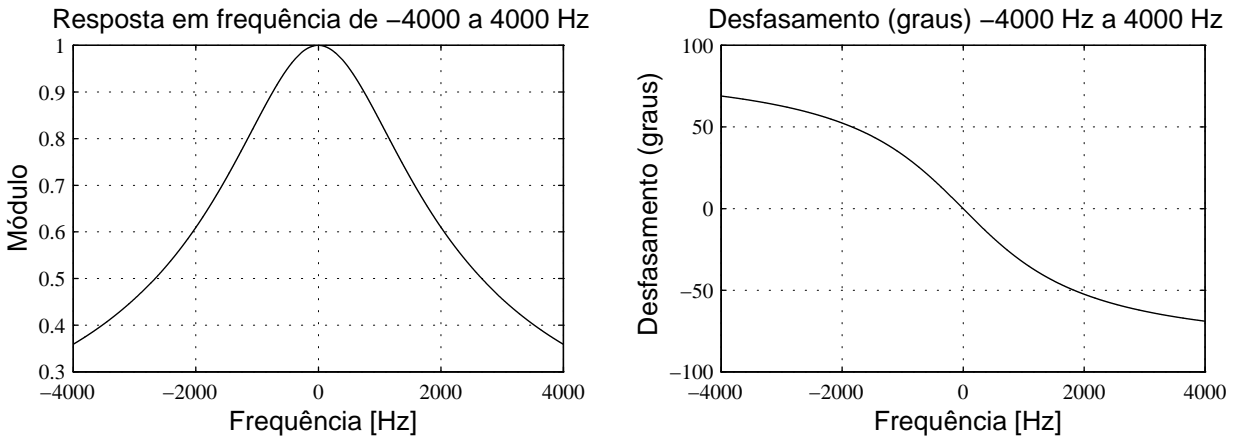


Figura 13: Módulo e fase da resposta em frequência do sistema RC de 1ª ordem ( $R = 4.7 \text{ K}\Omega$  e  $C = 22 \text{ nF}$ ).

Frequência	Módulo	Fase
0	1	0°
200	0.997	-7.4°
500	0.95	-18°
1000	0.8386	-33.01°
2000	0.609	-52.41°
5000	0.2942	-72.88°
10000	0.1521	-81.24°

Tabela 7: Módulo e fase da resposta do sistema RC de 1ª ordem ( $R = 4.7 K\Omega$  e  $C = 22 nF$ ), para determinadas frequências.

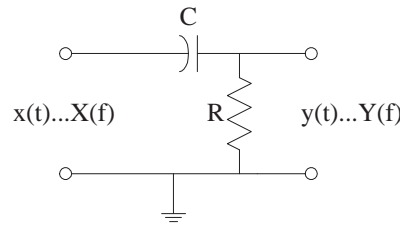


Figura 14: Sistema CR de 1ª ordem.

### 3.5 Sistema CR de 1ª ordem (passa-alto)

Efectua-se agora a análise do circuito CR de 1ª ordem, apresentado na figura 14, de forma semelhante à do circuito RC. Efectuando a análise em frequência para este circuito, vem

$$H_{CR}(f) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j2\pi f RC}{j2\pi f RC + 1}$$

Efectuando a separação em módulo  $|H_{CR}(f)|$  e fase  $\arg[H_{CR}(f)]$ , tem-se

$$|H_{CR}(f)| = \frac{2\pi|f|RC}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

e

$$\arg[H_{CR}(f)] = \arg[j2\pi f RC] - \arg[j2\pi f RC + 1] = \begin{cases} 90^\circ - \text{atan}(2\pi f RC), & f > 0 \\ -90^\circ - \text{atan}(2\pi f RC), & f < 0. \end{cases}$$

A figura 15 mostra respectivamente o módulo  $|H_{CR}(f)|$  e a fase  $\arg[H_{CR}(f)]$  do sistema, considerando  $R = 4.7 K\Omega$  e  $C = 22 nF$ . A tabela 8 mostra o valor do módulo e da fase para várias frequências.

Frequência	Módulo	Fase
0	0	90°
200	0.129	82.6°
500	0.309	72.0°
1000	0.545	57.0°
2000	0.793	37.6°
5000	0.9557	17.1°
10000	0.9884	8.8°

Tabela 8: Módulo e fase da resposta do sistema CR de 1ª ordem ( $R = 4.7 K\Omega$  e  $C = 22 nF$ ), para determinadas frequências.

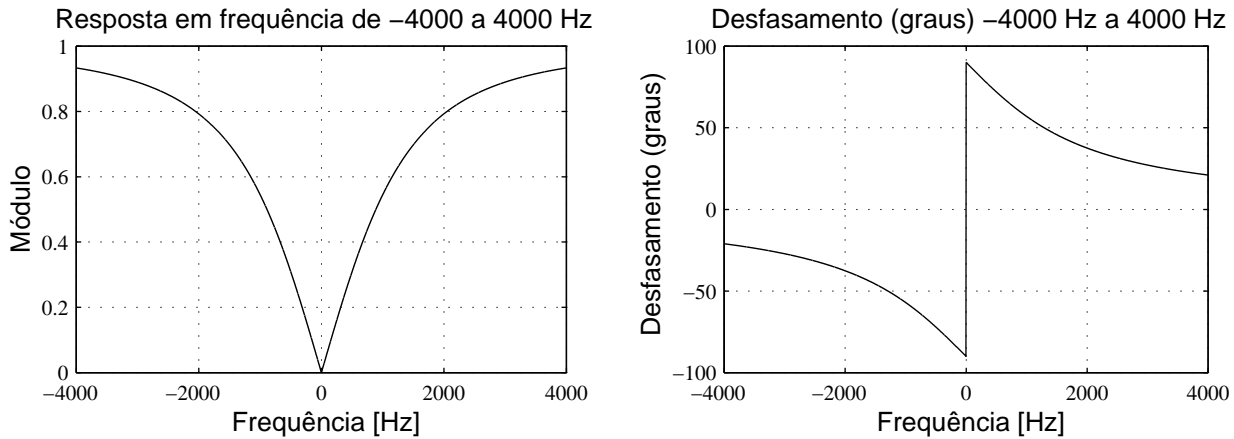


Figura 15: Módulo e fase da resposta em frequência do sistema CR de 1ª ordem ( $R = 4.7 \text{ K}\Omega$  e  $C = 22 \text{ nF}$ ).

### 3.6 Associação Série RC/CR (passa-banda)

Realiza-se agora a associação em série dos dois sistemas apresentados nas secções anteriores. A associação série dos sistemas apresenta-se na figura 16. A resposta em frequência do sistema equivalente é dada por

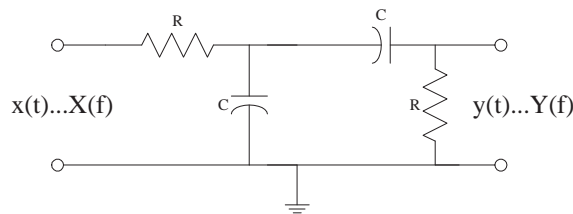


Figura 16: Associação em série dos sistemas RC e CR.

$$H(f) = H_{RC}(f)H_{CR}(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} = \frac{j2\pi fRC}{(1 + j2\pi fRC)^2}$$

Por sua vez o módulo  $|H(f)|$  e a fase  $\arg[H(f)]$  deste sistema, têm as seguintes expressões

$$|H(f)| = |H_{RC}(f)||H_{CR}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} \frac{2\pi|f|RC}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} = \frac{2\pi|f|RC}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

$$\begin{aligned} \arg[H(f)] &= \arg[H_{RC}(f)] + \arg[H_{CR}(f)] = \begin{cases} -\text{atan}(2\pi fRC) + 90^\circ - \text{atan}(2\pi fRC), & f > 0 \\ -\text{atan}(2\pi fRC) - 90^\circ - \text{atan}(2\pi fRC), & f < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 90^\circ - 2\text{atan}(2\pi fRC), & f > 0 \\ -90^\circ - 2\text{atan}(2\pi fRC), & f < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

A figura 17 mostra o módulo e a fase considerando  $R = 4.7 \text{ K}\Omega$  e  $C = 22 \text{ nF}$ . A tabela 9 mostra o valor do módulo e da fase para várias frequências.

## 4 Utilização do MATLAB

A função `conv` do MATLAB realiza o cálculo da convolução linear. O comando MATLAB apresentado de seguida calcula a convolução linear discreta apresentada na tabela 4 e na figura 5.

```
>> conv( [3,4,1], [2,0,-3,5] )
ans =
     6     8    -7     3    17     5
>>
```

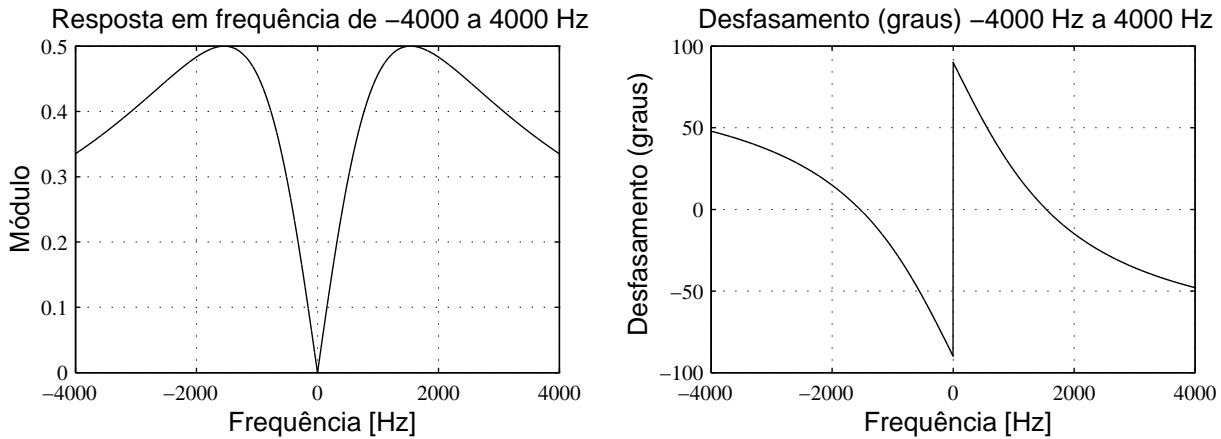


Figura 17: Módulo e fase da resposta em frequência da associação em série RC/CR de 1ª ordem ( $R = 4.7 K\Omega$  e  $C = 22 nF$ ).

Frequência	Módulo	Fase
0	0	90°
200	0.128	75.2°
500	0.294	54.0°
1000	0.457	24°
2000	0.4833	-14.8°
5000	0.2812	-55.77°
10000	0.1504	-72.4992

Tabela 9: Módulo e fase da resposta da associação série dos sistemas RC/CR de 1ª ordem ( $R = 4.7 K\Omega$  e  $C = 22 nF$ ), para várias frequências.

A função `demo_slit` apresenta o código necessário para aplicar um sinal de áudio no formato *wave*, na entrada do SLIT com  $h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n - 2] + 5\delta[n - 3]$  e reproduzir na card de áudio o sinal obtido à saída.

```
function demo_slit()
[x,Fs] = wavread('music.wav');
h = [2 0 -3 5];
y = conv( x, h );
wavplay(y, Fs);
```

## 5 Exercícios propostos

1. Considere o sistema RC apresentado na figura 13. Qual a expressão do sinal à saída do sistema quando na entrada se apresenta

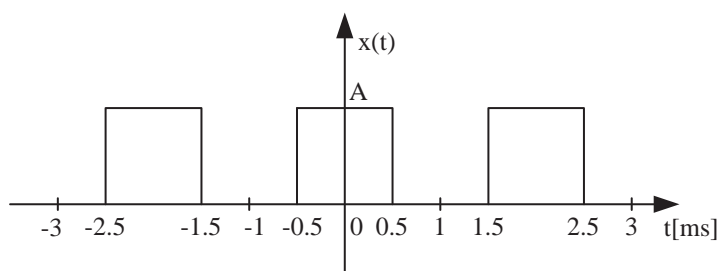
- $x_1(t) = 2\cos(2\pi 500t + \phi)$ ?
- $x_2(t) = 3 - \cos(2\pi 1000t + \phi)$ ?

2. Calcule a resposta em frequência equivalente da associação paralelo dos sistemas RC e CR. Obtenha as expressões do módulo e fase da resposta em frequência.

3. Sobre um SLIT contínuo foram aplicados vários sinais na entrada e observadas as respectivas saídas, tal como descrito na tabela abaixo. Sobre o sistema, sabe-se ainda que o módulo da resposta em frequência é do tipo  $|H(f)| = K \Lambda(\frac{f}{W})$ , em que  $K$  e  $W$  são constantes positivas.

Sinal de entrada $x(t)$	Sinal de saída $y(t)$
$2 \cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{6})$	$36 \cos(2\pi 100t + \frac{\pi}{3})$
$\cos(2\pi 500t)$	$10 \cos(2\pi 500t + \frac{\pi}{6})$
$3 \cos(2\pi 2500t - \frac{\pi}{4})$	0
$6 \cos(2\pi 5000t)$	0

- a) Determine e esboce o módulo da resposta em frequência  $|H(f)|$ , dando valores a  $K$  e  $W$ ; esboce uma fase,  $\arg[H(f)]$ , possível para este sistema;
- b) Determine e esboce o sinal na saída do sistema quando na entrada se apresenta o sinal  $x(t)$  da figura abaixo.



4. Seja  $h_1[n] = \delta[n - 1] + 2\delta[n - 3] + \delta[n - 4]$ , a resposta impulsional do SLIT  $S_1$ .

- a) Determine e esboce o sinal na saída do sistema quando na entrada se apresenta  $x[n] = 3\delta[n - 10] + 3\delta[n - 11]$ .
- b) Apresente o diagrama de blocos detalhado com ganhos, atrasos e somadores, do sistema  $S_2$ , o qual corresponde à associação série de  $S_1$  consigo próprio.

5. Considere os SLIT discretos  $S_1$  e  $S_2$  cujas respostas impulsionais são  $h_1[n] = 3\delta[n - 1] - 3\delta[n - 2]$  e  $h_2[n] = 4\delta[n - 3] + 6\delta[n - 5]$ , respectivamente.

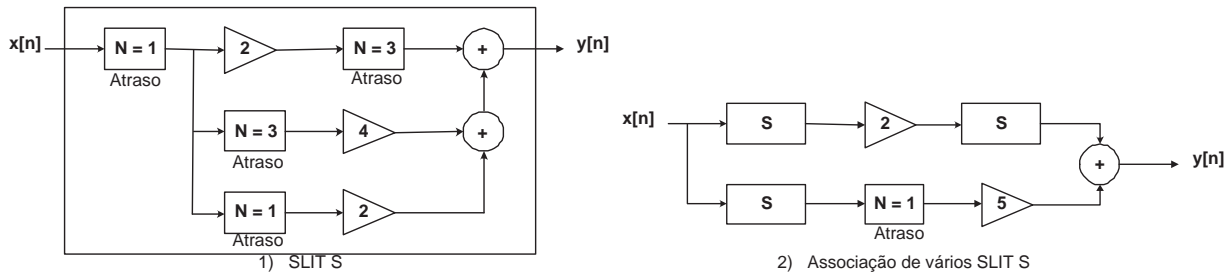
- a) Qual o sinal na saída de  $S_1$  quando na entrada se apresenta o sinal  $x[n] = 3\delta[n - 4]$ ?
- b) Considere a associação série de  $S_1$  com  $S_2$ ; calcule a resposta impulsional do sistema equivalente ( $h_{eq}[n]$ ) e apresente o respectivo diagrama de blocos.

6. Considere o sinal  $x[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n - 1] + 2\delta[n - 2]$ .

- a) Calcule e esboce o sinal resultante da convolução linear da componente par de  $x[n]$  com o sinal  $x[2n]$ , ou seja,  $x_e[n] * x[2n]$ ;
- b) Esboce o diagrama de blocos do sistema cuja resposta impulsional é  $x[2n]$ ; esboce o sinal na saída do sistema quando na sua entrada se apresenta o sinal  $s_1[n] = x_e[n] + 2\delta[n] + \delta[n - 1]$ .  
*Sugestão: Procure reutilizar alguns cálculos da alínea anterior.*

7. Considere o SLIT discreto  $S$ . A figura da esquerda apresenta um diagrama de blocos que representa o sistema e a figura da direita representa uma associação de vários SLIT  $S$ .

- a) Determine a resposta impulsional do SLIT  $S$  e apresente o diagrama de blocos simplificado.
- b) Calcule e esboce a resposta impulsional equivalente da associação apresentada na figura da direita.
- c) Qual o sinal na saída da associação da figura da direita, quando na entrada está  $x[n] = \delta[n - 4] + \delta[n - 6]$ ?



## 6 Alguns *links* interessantes

Apresenta-se a lista de dois *links* referentes a sistemas lineares e invariantes no tempo, nomeadamente ao cálculo da convolução linear.

- Demonstrações de cálculo da convolução linear discreta:  
<http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html>
- Demonstrações de cálculo da convolução linear contínua:  
<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

## A Apêndice

### A.1 Matriz de *Toeplitz*

A matriz de *Toeplitz* caracteriza-se por possuir o mesmo elemento ao longo da diagonal principal e das subdiagonais. É utilizada para realizar operações de correlação e convolução linear. A matriz quadrada de *Toeplitz* com dimensão  $N$  tem a forma

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-N+1} \\ t_1 & t_0 & & t_{-N+2} \\ t_2 & t_1 & & \vdots \\ \vdots & & & t_{-1} \\ t_{N-1} & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Apresenta-se como exemplo, uma matriz quadrada, com  $N = 3$ :

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz não é obrigatoriamente quadrada. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de *Toeplitz*.

### A.2 Convolução no tempo/multiplicação na frequência

Demonstra-se a propriedade da transformada de Fourier que indica que a convolução no tempo corresponde ao produto na frequência

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f). \quad (26)$$

Tendo em conta a definição da convolução linear contínua

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \lambda) d\lambda, \quad (27)$$

a definição de transformada de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (28)$$

e aplicando a primeira sobre a segunda obtém-se

$$\begin{aligned} TF[x(t) * y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * y(t)) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) y(t - \lambda) d\lambda \right) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \lambda) \exp(-j2\pi ft) dt \right)}_{Y(f) \exp(-j2\pi f\lambda)} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) Y(f) \exp(-j2\pi f\lambda) d\lambda = Y(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \exp(-j2\pi f\lambda) d\lambda}_{X(f)} = Y(f)X(f) = X(f)Y(f). \quad (29) \end{aligned}$$

## Referências

- [1] A. Carlson. *Communication Systems*. McGraw-Hill, 4th edition, 2001.
- [2] H. P. Hsu. *Signals and Systems*. McGraw-Hill, 1995.
- [3] J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder. *DSP First - A multimedia approach*. Prentice Hall, 2003.
- [4] A. Oppenheim and A. Willsky. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [5] B. Veen and S. Haykin. *Signals and Systems*. John Wiley & Sons, 1999.