

**Instituto Superior de Engenharia de Lisboa**  
Engenharia Informática e de Computadores

**Teoria dos Sinais e dos Sistemas**

**Transformada de *Fourier*: pares típicos, propriedades, demonstrações e exemplos de cálculo.**

Artur Ferreira {arturj@isel.pt}

22 Outubro 2001

Versão 1.0

---

**Motivação e Objectivos**

Pretende-se que este documento sirva de apoio à compreensão e aos cálculos sobre a Transformada de *Fourier*, na forma directa e inversa, utilizando as suas propriedades. Não é um documento de referência completa, não dispensando por isso, a consulta da bibliografia recomendada.

Apresentam-se três tabelas: de pares típicos tempo/frequência, de propriedades e de simetrias. Todas estas tabelas relacionam o domínio do tempo com o da frequência, permitindo analisar conjuntamente as características dos sinais nos dois domínios. Demonstram-se alguns dos resultados apresentados nas tabelas. No final apresentam-se exemplos de cálculo que requerem a utilização conjunta destas tabelas.

## Índice

<b>1</b>	<b>Tabela de Transformadas</b>	<b>1</b>
1.1	Cálculo de alguns pares típicos . . . . .	1
1.1.1	Pulso rectangular . . . . .	1
1.1.2	Exponencial ( $t > 0$ ) . . . . .	2
1.1.3	Exponencial simétrica . . . . .	2
1.1.4	Impulso <i>Dirac</i> . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Tabela de Propriedades</b>	<b>5</b>
2.1	Demonstração de algumas propriedades . . . . .	5
2.1.1	Linearidade (2 sinais) . . . . .	5
2.1.2	Linearidade (N sinais) . . . . .	6
2.1.3	<i>Time-Shift</i> (Deslocamento Temporal) . . . . .	6
2.1.4	Derivação no Tempo (1ª ordem) . . . . .	7
2.1.5	Derivação no Tempo (n-ésima ordem) . . . . .	7
2.1.6	Dualidade . . . . .	7
2.1.7	Convolução no tempo/multiplicação na frequência . . . . .	8
2.2	Outras propriedades . . . . .	9
2.2.1	Pontos Notáveis . . . . .	9
2.2.2	Teorema de <i>Rayleigh</i> . . . . .	9

<b>3</b>	<b>Tabela de Simetrias</b>	<b>10</b>
3.1	Demonstração de algumas simetrias . . . . .	10
3.1.1	Real no tempo/Complexo conjugado na frequência . . . . .	10
3.1.2	Real e par no tempo/Real e par na frequência . . . . .	11
3.1.3	Real e ímpar no tempo/Imaginário e ímpar na frequência . . . . .	11
3.2	Exemplos . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Exemplos de cálculo de transformadas</b>	<b>12</b>
4.1	Transformada Directa (Análise do Sinal) . . . . .	12
4.1.1	Pulso rectangular . . . . .	12
4.1.2	Sinal <i>sinc</i> . . . . .	12
4.1.3	Impulso <i>Dirac</i> . . . . .	13
4.1.4	Constante e pulso triangular . . . . .	13
4.2	Transformada Inversa (Síntese do Sinal) . . . . .	13
4.2.1	Exemplo nº 1: Pulso triangular . . . . .	13
4.2.2	Exemplo nº 2: Pulsos Rectangulares . . . . .	14
4.2.3	Exemplo nº 3: Espectro de Simetria Complexa . . . . .	14

# 1 Tabela de Transformadas

A tabela seguinte apresenta um conjunto de sinais típicos, representados nos domínios do tempo e da frequência.

Sinal Típico	Tempo: $x(t)$	Frequência: $X(f)$
Pulso rectangular	$A \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}(fT)$
Pulso triangular	$A \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}^2(fT)$
Exponencial ( $t > 0$ )	$\exp^{-bt} u(t)$	$\frac{1}{b + j2\pi f}$
Exponencial simétrica	$\exp^{-b t }$	$\frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2}$
Sinc	$\operatorname{sinc}(bt)$	$\frac{1}{b} \Pi\left(\frac{f}{b}\right)$
Sinc quadrada	$\operatorname{sinc}^2(bt)$	$\frac{1}{b} \Lambda\left(\frac{f}{b}\right)$
Gaussiana	$\exp^{-\pi(bt)^2}$	$\frac{1}{b} \exp^{-\pi\left(\frac{f}{b}\right)^2}$
Impulso Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Função degrau unitário	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Função sinal	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Trem de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$	$F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_s)$
Coseno	$\cos(2\pi f_o t + \Phi)$	$\frac{1}{2} \exp^{j\Phi} \delta(f - f_o) + \frac{1}{2} \exp^{-j\Phi} \delta(f + f_o)$
Seno	$\sin(2\pi f_o t + \Phi)$	$\frac{1}{2} \exp^{j(\Phi - \frac{\pi}{2})} \delta(f - f_o) + \frac{1}{2} \exp^{j(\frac{\pi}{2} - \Phi)} \delta(f + f_o)$

Tabela 1: Pares Típicos de Transformada de *Fourier*.

## 1.1 Cálculo de alguns pares típicos

Nesta secção apresentam-se cálculos de alguns pares apresentados na tabela 1 com a respectiva representação gráfica.

### 1.1.1 Pulso rectangular

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X(f) &= TF[x(t)] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \exp^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} (\exp^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - \exp^{+j2\pi f \frac{T}{2}}) = \\ &= \frac{A}{\pi f} \left( \frac{\exp^{j\pi f T} - \exp^{-j\pi f T}}{j2} \right) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT) \end{aligned} \quad (2)$$

A figura 1 ilustra este par típico com  $A = 2$  e  $T = 100 \text{ ms}$ .

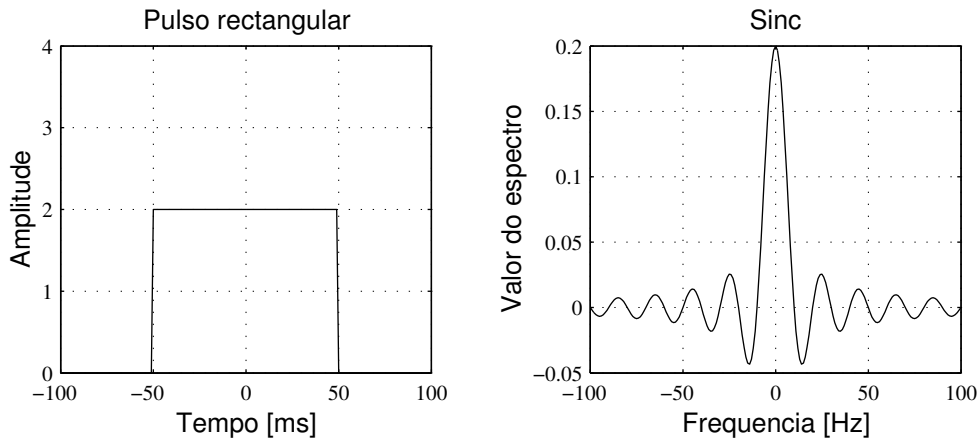


Figura 1: Par típico pulso rectangular no tempo/sinc na frequência.

### 1.1.2 Exponencial ( $t > 0$ )

$$x(t) = \exp^{-bt} u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{b + j2\pi f} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X(f) &= TF[x(t)] = \int_0^{\infty} \exp^{-bt} \exp^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} \exp^{-(b+j2\pi f)t} dt = \\ &= \frac{1}{-(b + j2\pi f)} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \exp^{-(b+j2\pi f)t} - \exp^0 \right) = \frac{1}{-(b + j2\pi f)} (0 - 1) = \frac{1}{b + j2\pi f} \end{aligned} \quad (4)$$

Obteve-se como espectro um sinal complexo de variável real, o qual pode ser separado em módulo e fase da seguinte forma:

$$|X(f)| = \left| \frac{1}{b + j2\pi f} \right| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (2\pi f)^2}} \quad (5)$$

$$\arg[X(f)] = \arg[1] - \arg[b + j2\pi f] = 0 - \arctan\left(\frac{2\pi f}{b}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{b}\right) \quad (6)$$

A figura 2 apresenta este sinal no domínio do tempo com  $b = \frac{1}{2}$ . O seu espectro separado em módulo e fase, apresenta-se nas figuras 3 a) e 3 b), respectivamente.

### 1.1.3 Exponencial simétrica

$$\begin{aligned} x(t) = \exp^{-b|t|} \quad \leftrightarrow \quad X(f) &= \frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2} \quad (7) \\ x(t) = \exp^{-b|t|} &= \underbrace{\exp^{-bt} u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{\exp^{bt} u(-t)}_{x_2(t)} \end{aligned}$$

Pela propriedade da linearidade<sup>1</sup> tem-se:

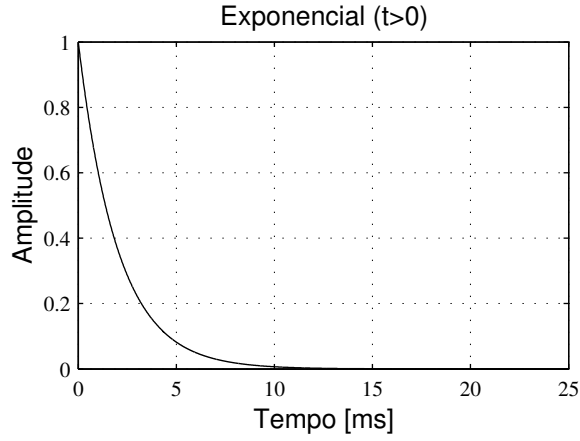


Figura 2: Exponencial ( $t > 0$ ), com  $b = \frac{1}{2}$ .

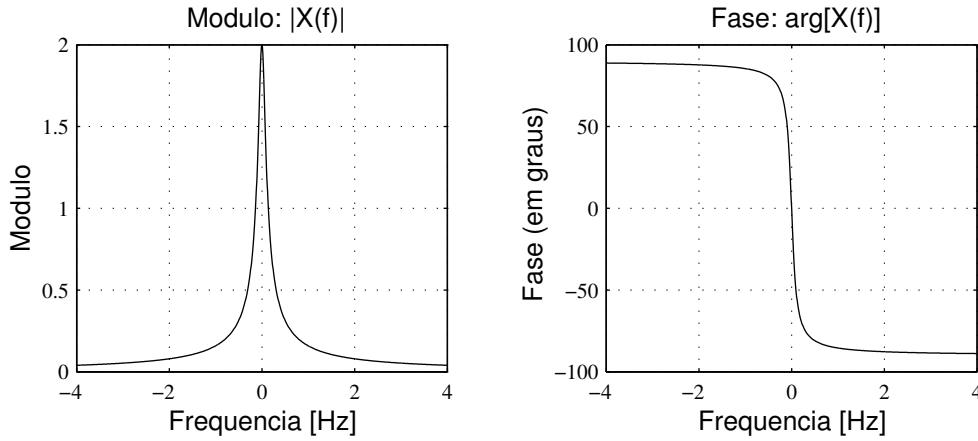


Figura 3: a) Módulo do espectro:  $|X(f)|$  b) Fase do espectro:  $arg[X(f)]$ .

$$X(f) = TF[x(t)] = TF[x_1(t) + x_2(t)] = TF[x_1(t)] + TF[x_2(t)] = X_1(f) + X_2(f)$$

Tal como calculado na secção anterior, tem-se:

$$X_1(f) = TF[x_1(t)] = TF[\exp^{-bt} u(t)] = \frac{1}{b + j2\pi f} \quad (8)$$

No caso do sinal  $x_2(t)$ , aplicamos a transformada:

$$\begin{aligned} X_2(f) &= TF[x_2(t)] = \int_{-\infty}^0 \exp^{bt} \exp^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 \exp^{(b-j2\pi f)t} dt = \\ &= \frac{1}{(b - j2\pi f)} \left( \exp^0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp^{(b-j2\pi f)t} \right) = \frac{1}{(b - j2\pi f)} (1 - 0) = \frac{1}{b - j2\pi f} \end{aligned} \quad (9)$$

Somando as duas transformadas obtém-se o espectro completo:

$$TF[x_1(t)] + TF[x_2(t)] = X_1(f) + X_2(f) = \frac{1}{b + j2\pi f} + \frac{1}{b - j2\pi f} =$$

---

<sup>1</sup>Demonstrada nas secções 2.1.1 e 2.1.2

$$= \frac{b - j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} + \frac{b + j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} = \frac{b - j2\pi f + b + j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2} \quad (10)$$

Verifica-se que o espectro é um sinal real e par. Na figura 4 a) apresenta-se o sinal no domínio do tempo com  $b = \frac{1}{2}$ . A figura 4 b) apresenta o espectro correspondente.

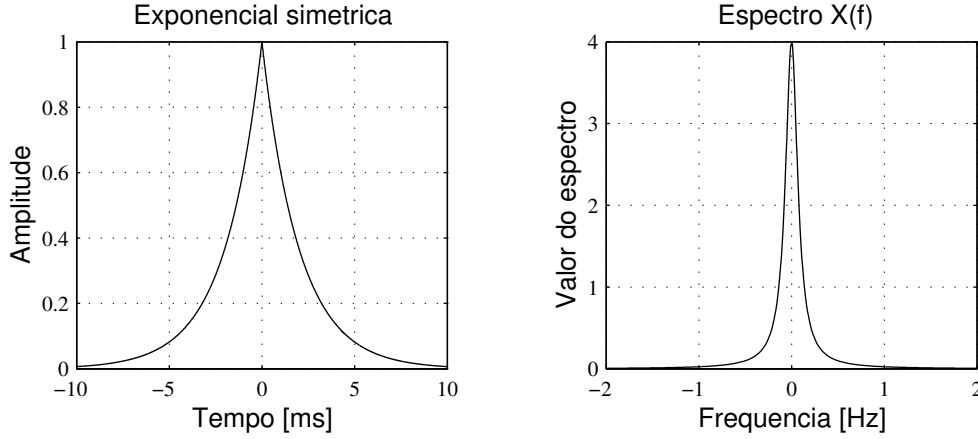


Figura 4: a) Exponencial simétrica com  $b = \frac{1}{2}$ . b) Espectro.

#### 1.1.4 Impulso *Dirac*

$$TF[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp^{-j2\pi ft} dt = \exp^{-j2\pi f0} = 1 \quad (11)$$

No cálculo desta transformada teve-se em conta a seguinte propriedade da função impulso *Dirac*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_o) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_o)\delta(t - t_o) dt = x(t_o) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt}_1 = x(t_o) \quad (12)$$

Fazendo  $t_o = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt}_1 = x(0) \quad (13)$$

## 2 Tabela de Propriedades

Considere os sinais de energia  $x(t)$  e  $y(t)$ , cujos espectros são  $X(f)$  e  $Y(f)$ , respectivamente, ou seja:

$$X(f) = TF[x(t)] \quad Y(f) = TF[y(t)] \quad (14)$$

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] \quad y(t) = TF^{-1}[Y(f)] \quad (15)$$

ou ainda, de forma abreviada:

$$x(t) \underset{TF}{\leftrightarrow} X(f) \quad y(t) \underset{TF}{\leftrightarrow} Y(f)$$

A tabela seguinte apresenta as propriedades mais importantes<sup>2</sup> da transformada de *Fourier*.

Nome da propriedade	Tempo: $x(t), y(t)$	Frequência: $X(f), Y(f)$
Linearidade (2 sinais)	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Linearidade (N sinais)	$\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$	$\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i(f)$
<i>Time-Shift</i>	$x(t - b)$	$X(f) \exp^{-j2\pi fb}$
<i>Time-Scale</i>	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
<i>Time-Shift e Time-Scale</i>	$x(at - b)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) \exp^{-j2\pi \frac{f}{a} b}$
Dualidade	$X(t)$	$x(-f)$
Derivação (1ª ordem)	$\frac{dx(t)}{dt}$	$(j2\pi f) X(f)$
Derivação (n-ésima ordem)	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Convolução	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
Multiplicação	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Modulação	$x(t)A \cos(2\pi f_c t + \Phi)$	$\frac{A}{2} X(f - f_c) \exp^{j\Phi} + \frac{A}{2} X(f + f_c) \exp^{-j\Phi}$
Multiplicação por $t^n$	$t^n x(t)$	$(-j2\pi)^n \frac{d^n X(f)}{df^n}$
Integração	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$

Tabela 2: Algumas Propriedades da Transformada de *Fourier*.

### 2.1 Demonstração de algumas propriedades

#### 2.1.1 Linearidade (2 sinais)

$$TF[ax(t) + by(t)] \leftrightarrow aX(f) + bY(f) \quad (16)$$

<sup>2</sup>No contexto da disciplina TSS.

Aplicando a definição da Transformada directa de *Fourier*, chega-se ao resultado pretendido:

$$\begin{aligned}
 TF[ax(t) + by(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax(t) + by(t)) \exp^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp^{-j2\pi ft} dt}_{Y(f)} = aX(f) + bY(f)
 \end{aligned} \tag{17}$$

### 2.1.2 Linearidade (N sinais)

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i(f) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 TF\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)\right) \exp^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_N x_N(t)) \exp^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \alpha_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp^{-j2\pi ft} dt}_{X_1(f)} + \alpha_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \exp^{-j2\pi ft} dt}_{X_2(f)} + \dots + \alpha_N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_N(t) \exp^{-j2\pi ft} dt}_{X_N(f)} = \\
 &= \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f) + \dots + \alpha_N X_N(f) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i(f)
 \end{aligned} \tag{19}$$

### 2.1.3 *Time-Shift* (Deslocamento Temporal)

$$TF[x(t - b)] \leftrightarrow X(f) \exp^{-j2\pi fb} \tag{20}$$

$$TF[x(t - b)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - b) \exp^{-j2\pi ft} dt$$

Realizando a mudança de variável  $\lambda = t - b$ , tem-se  $\frac{d\lambda}{dt} = 1 \iff d\lambda = dt$  e  $t = \lambda + b$ .

$$\begin{aligned}
 TF[x(\lambda)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \exp^{-j2\pi f(\lambda+b)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \exp^{-j2\pi f\lambda} \exp^{-j2\pi fb} d\lambda = \\
 &= \exp^{-j2\pi fb} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \exp^{-j2\pi f\lambda} d\lambda}_{X(f)} = \exp^{-j2\pi fb} X(f) = X(f) \exp^{-j2\pi fb}
 \end{aligned} \tag{21}$$

### 2.1.4 Derivação no Tempo (1ª ordem)

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi ft} df &\Leftrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi ft} df}{dt} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j2\pi f X(f)}_{\text{Novo espectro}} \exp^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (23)$$

### 2.1.5 Derivação no Tempo (n-ésima ordem)

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi ft} df &\Leftrightarrow \frac{d^n x(t)}{dt^n} = \frac{d^n \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi ft} df}{dt^n} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(j2\pi f)^n X(f)}_{\text{Novo espectro}} \exp^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (25)$$

### 2.1.6 Dualidade

$$X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad (26)$$

Tendo em conta as equações de análise(transformada directa) e de síntese(transformada inversa) apresentadas nas equações (27) e (28):

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-j2\pi ft} dt \quad (27)$$

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi ft} df \quad (28)$$

Verifica-se que ambas as equações podem ser escritas na forma:

$$y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\beta) \exp^{j2\pi\alpha\beta} d\beta \quad (29)$$

Sobre a equação (29), fazendo  $\alpha = t$  e  $\beta = f$ , tem-se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(f) \exp^{j2\pi tf} df = TF^{-1}[z(f)] \quad (30)$$

Obtendo-se o seguinte par de transformada de *Fourier*:

$$y(t) \underset{TF}{\leftrightarrow} z(f)$$

ou seja, o sinal  $z$  é o espectro do sinal  $y$ .

Sobre a equação (29), fazendo  $\alpha = -f$  e  $\beta = t$ , tem-se:

$$y(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp^{-j2\pi ft} dt = TF[z(t)] \quad (31)$$

Obtendo-se o seguinte par de transformada de *Fourier*:

$$z(t) \underset{TF}{\leftrightarrow} y(-f)$$

concluindo-se que o sinal  $y$  após reflexão é o espectro do sinal  $z$ . Desta forma confirma-se que o sinal  $z(t)$  tem como transformada o sinal  $y(-f)$ , ou seja, o sinal que anteriormente estava no domínio do tempo, aparece agora como espectro após reflexão.

### Exemplos

Note que na tabela 1 estão presentes exemplos de dualidade. O pulso rectangular no tempo tem a *sinc* como espectro. Por sua vez o sinal *sinc* no tempo tem como espectro o pulso rectangular. O mesmo se passa com o pulso triangular e o sinal *sinc*<sup>2</sup>. Outro exemplo de dualidade verifica-se entre o impulso *dirac* e a constante, ilustrado na figura 5.

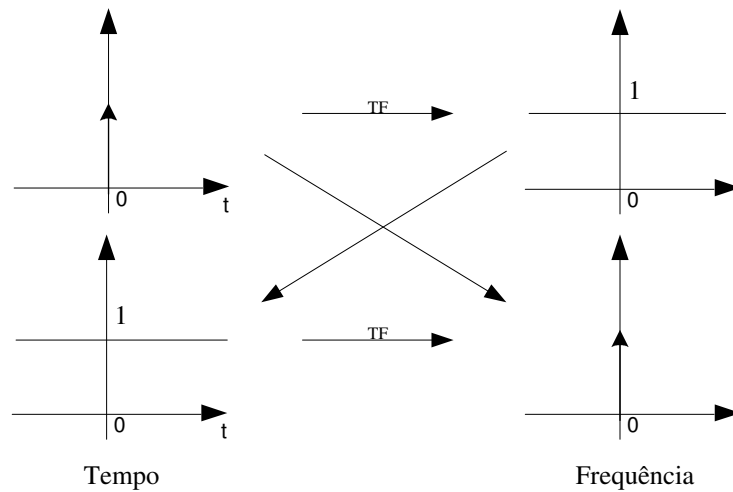


Figura 5: Ilustração da dualidade.

### 2.1.7 Convolução no tempo/multiplicação na frequência

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f) \quad (32)$$

Tendo em conta a definição da convolução linear:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
TF[x(t) * y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * y(t)) \exp^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \right) \exp^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \exp^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(f) \exp^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f)X(f) = X(f)Y(f)
\end{aligned} \tag{34}$$

## 2.2 Outras propriedades

Existem duas propriedades relevantes sobre a Transformada de *Fourier* que são tratadas nesta secção.

### 2.2.1 Pontos Notáveis

A primeira propriedade relaciona o ponto  $f = 0$  com a área no domínio no tempo, e o ponto  $t = 0$  com a área no domínio da frequência. Analisando a transformada directa, apresentada na equação (27) e concretizando  $f = 0$  tem-se:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-j2\pi 0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \tag{35}$$

Realizando a mesma análise sobre a transformada inversa, ou seja, fazendo  $t = 0$  obtemos:

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp^{j2\pi f0} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \tag{36}$$

Concluindo-se que num domínio, no ponto 0 está a área do outro domínio.

### 2.2.2 Teorema de *Rayleigh*

A segunda propriedade é o conhecido Teorema de *Rayleigh*, que indica que a energia de um sinal  $x(t)$  pode ser calculada a partir do módulo<sup>3</sup> do seu espectro  $|X(f)|$ , da seguinte forma:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \tag{37}$$

Tendo em conta a definição de energia no domínio do tempo obtemos:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \tag{38}$$

A partir da igualdade da equação (38) tiram-se determinadas propriedades sobre sinais típicos. Por exemplo, considerando o pulso rectangular apresentado na tabela 1, obtemos uma das propriedades do sinal *sinc*.

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (AT \operatorname{sinc}(fT))^2 df = A^2 T \right) \\
A^2 T^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(fT) df}_{\frac{1}{T}} &= A^2 T \iff \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(fT) df = \frac{1}{T}
\end{aligned} \tag{39}$$

---

<sup>3</sup>A energia não é influenciada pela fase.

### 3 Tabela de Simetrias

Tempo: $x(t)$	Frequência: $X(f)$
Par	Par
Ímpar	Ímpar
Real	Simetria complexa
Real e Par	Real e Par
Real e Ímpar	Imaginário e Ímpar
Imaginário	Anti-Simetria Complexa
Imaginário e Par	Imaginário e Par
Complexo e Par	Complexo e Par
Real Par + Imaginário Ímpar	Real
Real Ímpar + Imaginário Par	Imaginário

Tabela 3: Simetrias da Transformada de *Fourier*.

#### 3.1 Demonstração de algumas simetrias

##### 3.1.1 Real no tempo/Complexo conjugado na frequência

Seja  $x(t)$  um sinal real sem simetria, ou seja, não é par nem ímpar. Aplicando a definição da transformada de *Fourier* e a escrita da exponencial complexa na forma cartesiana tem-se:

$$\begin{aligned}
 X(f) = TF[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt
 \end{aligned} \tag{40}$$

Atendendo a que qualquer sinal sem simetria pode ser escrito através da soma das suas componentes par e ímpar:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \tag{41}$$

Aplicando a equação (41) sobre a equação (40) e tendo em conta que o *coseno* tem simetria par<sup>4</sup> e o *seno* simetria ímpar<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t)) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t)) \sin(2\pi ft) dt \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \cos(2\pi ft) dt}_{\substack{\text{ímpar} \\ 0}}
 \end{aligned} \tag{42}$$

<sup>4</sup> $\cos(2\pi ft) = \cos(2\pi(-f)t)$

<sup>5</sup> $\sin(2\pi ft) = -\sin(2\pi(-f)t)$

$$\begin{aligned}
& -j \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x_e(t) \sin(2\pi ft)}_{\substack{\text{impar} \\ 0}} dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \\
X(f) = & \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (43)
\end{aligned}$$

Atendendo a que o *coseno* tem simetria par e o *seno* simetria ímpar, tem-se:

$$X(f) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt, & f > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) dt, & f = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt, & f < 0 \end{cases} \quad (44)$$

Verifica-se que a parte real do espectro tem o mesmo valor para frequências positivas e negativas, ao passo que a parte imaginária é simétrica, fazendo com que o espectro seja complexo conjugado, em torno da frequência zero.

### 3.1.2 Real e par no tempo/Real e par na frequência

Tendo em conta a equação (43) e que no caso de um sinal ser real e par tem-se  $x(t) = x_e(t)$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (45)$$

Concluindo-se imediatamente que o espectro é real.

Tendo em conta que  $\cos(2\pi ft) = \cos(2\pi(-f)t)$  e que o produto de duas funções com simetria par resulta noutra também com simetria par obtém-se:

$$X(f) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt, & f > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) dt, & f = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi(-f)t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt, & f < 0 \end{cases} \quad (46)$$

Ou seja, para além de real, o espectro apresenta simetria par, em torno do ponto  $f = 0$ .

### 3.1.3 Real e ímpar no tempo/Imaginário e ímpar na frequência

Analisando a equação (43) e sabendo que um sinal ímpar verifica  $x(t) = x_o(t)$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt = -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (47)$$

Concluindo-se que o espectro é imaginário puro.

Tendo em conta que  $\sin(2\pi ft) = -\sin(2\pi(-f)t)$  e que o produto de duas funções com simetria ímpar resulta numa função de simetria par obtém-se:

$$X(f) = \begin{cases} -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt, & f > 0 \\ -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \cdot 0 dt = 0, & f = 0 \\ -j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi(-f)t) dt = j \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft) dt, & f < 0 \end{cases} \quad (48)$$

Demonstra-se assim que, para além de imaginário puro, o espectro apresenta simetria ímpar, em torno do ponto  $f = 0$ .

## 3.2 Exemplos

Analisando a tabela 1, vamos procurar exemplos destas simetrias.

- **Real no tempo/Complexo conjugado na frequência:** Exponencial ( $t > 0$ ) e função degrau unitário;
- **Real e par no tempo/Real e par na frequência:** Pulso rectangular, pulso triangular, *sinc*, *sinc*<sup>2</sup> e exponencial simétrica;
- **Real e ímpar no tempo/Imaginário e ímpar na frequência:** Função sinal.

## 4 Exemplos de cálculo de transformadas

Nesta secção apresentam-se exemplos de cálculo de transformadas directas e inversas, recorrendo às três tabelas apresentadas.

### 4.1 Transformada Directa (Análise do Sinal)

#### 4.1.1 Pulso rectangular

$$x(t) = -4 \Pi\left(\frac{t}{6}\right) \quad (49)$$

$$X(f) = TF[x(t)] = TF\left[-4 \Pi\left(\frac{t}{6}\right)\right] = -4 TF\left[\Pi\left(\frac{t}{6}\right)\right] = -24 \text{sinc}(6f) \quad (50)$$

#### 4.1.2 Sinal *sinc*

$$x(t) = 3 \text{sinc}(4t) \quad (51)$$

$$X(f) = TF[x(t)] = TF[3 \text{sinc}(4t)] = 3 TF[\text{sinc}(4t)] = 3 \frac{1}{4} \Pi\left(\frac{f}{4}\right) = \frac{3}{4} \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \quad (52)$$

### 4.1.3 Impulso *Dirac*

$$x(t) = 4\delta(t - 1) \quad (53)$$

Aplicando a transformada directa, tendo em conta as propriedades da linearidade e do *time-shift*:

$$X(f) = TF[x(t)] = TF[4\delta(t - 1)] = 4 TF[\delta(t - 1)] = 4 \exp^{-j2\pi f} \quad (54)$$

Realizando a separação em módulo e fase tem-se:

$$|X(f)| = 4 \quad \arg[X(f)] = -2\pi f \quad (55)$$

### 4.1.4 Constante e pulso triangular

Considere o sinal  $x(t)$  apresentado na figura 6, onde se evidencia a escrita do mesmo à custa de sinais típicos.

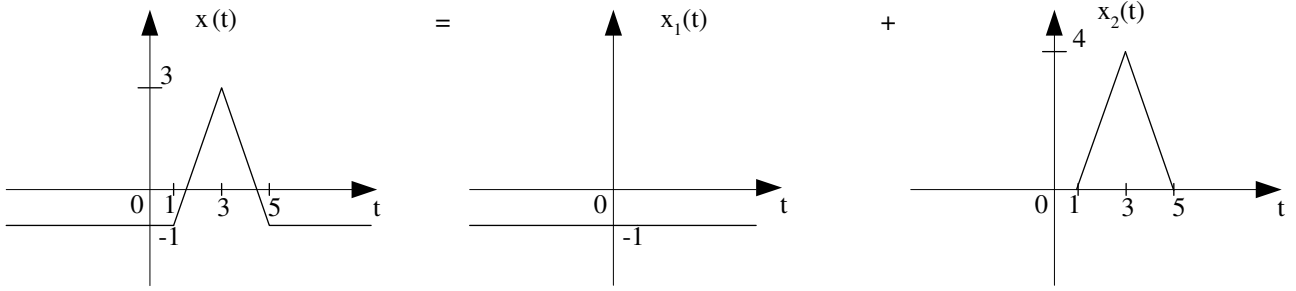


Figura 6: Sinal  $x(t)$  escrito na forma da soma de dois sinais.

Uma expressão analítica para o sinal  $x(t)$ , que o exprime à custa dos sinais típicos apresentados é a seguinte:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = -1 + 4\Lambda\left(\frac{t-3}{2}\right) \quad (56)$$

De acordo com os pares típicos da tabela 1, as propriedades da linearidade e *time-shift* apresentadas na tabela 2:

$$X(f) = TF[-1] + TF\left[4\Lambda\left(\frac{t-3}{2}\right)\right] = -\delta(f) + 8\text{sinc}^2(2f) \exp^{-j2\pi f3} \quad (57)$$

## 4.2 Transformada Inversa (Síntese do Sinal)

### 4.2.1 Exemplo nº 1: Pulso triangular

Considere o espectro real e par apresentado na figura 7, cuja expressão analítica é dada por:

$$X(f) = 4\Lambda\left(\frac{f}{2}\right) \quad (58)$$

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = TF^{-1}\left[4\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)\right] = 8TF^{-1}\left[\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f}{2}\right)\right] = 8\text{sinc}^2(2t) \quad (59)$$

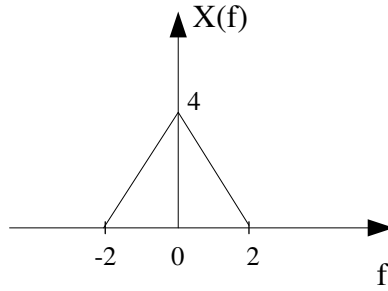


Figura 7: Espectro  $X(f)$ .

#### 4.2.2 Exemplo nº 2: Pulsos Rectangulares

A figura 8 representa o espectro do sinal  $x(t)$ .

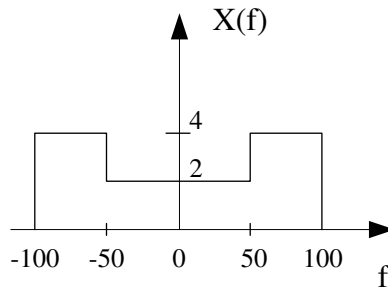


Figura 8: Espectro  $X(f)$ .

Analisando o espectro, verifica-se que este é real e par e pode ser escrito na forma:

$$X(f) = 4 \Pi\left(\frac{f}{200}\right) - 2 \Pi\left(\frac{f}{100}\right) \quad (60)$$

Aplicando a transformada inversa, e tendo a conta a propriedade da linearidade:

$$\begin{aligned} x(t) &= TF^{-1} \left[ 4 \Pi\left(\frac{f}{200}\right) - 2 \Pi\left(\frac{f}{100}\right) \right] = 4 TF^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{200}\right) \right] - 2 TF^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{100}\right) \right] = \\ &= 800 TF^{-1} \left[ \frac{1}{200} \Pi\left(\frac{f}{200}\right) \right] - 200 TF^{-1} \left[ \frac{1}{100} \Pi\left(\frac{f}{100}\right) \right] = 800 \text{sinc}(200t) - 200 \text{sinc}(100t) \end{aligned} \quad (61)$$

Obteve-se, tal como esperado, um sinal real e par no domínio do tempo.

#### 4.2.3 Exemplo nº 3: Espectro de Simetria Complexa

Considere o espectro apresentado na expressão

$$X(f) = \frac{1}{1 + j\pi f} - 2 \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \quad (62)$$

Pretende-se determinar a expressão do sinal  $x(2t)$ .

#### Processo 1

Vamos começar por calcular a expressão de  $x(t)$  e em seguida obtemos a expressão de  $x(2t)$ . Tendo em conta a propriedade da linearidade, analisamos a expressão em duas parcelas:

$$x(t) = TF^{-1} \left[ \frac{1}{1+j\pi f} - 2\Pi\left(\frac{f}{4}\right) \right] = \underbrace{TF^{-1} \left[ \frac{1}{1+j\pi f} \right]}_{x_1(t)} + \underbrace{(-2)TF^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \right]}_{x_2(t)}$$

Sobre a primeira parcela,  $x_1(t)$ , recorrendo ao par típico *exponencial*  $t>0$ , da tabela 1:

$$x_1(t) = TF^{-1} \left[ \frac{1}{1+j\pi f} \right] = TF^{-1} \left[ \frac{2}{2+j2\pi f} \right] = 2TF^{-1} \underbrace{\left[ \frac{1}{2+j2\pi f} \right]}_{X_1(f)} =$$

$$x_1(t) = 2 \exp^{-2t} u(t) \quad (63)$$

Sobre a segunda parcela,  $x_2(t)$ , a transformada inversa é calculada por consulta do par típico *sinc* da tabela 1:

$$x_2(t) = -2 TF^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \right] = -8 TF^{-1} \left[ \frac{1}{4} \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \right] = -8 \text{sinc}(4t) \quad (64)$$

Obtém-se assim o sinal  $x(t)$ :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \exp^{-2t} u(t) - 8 \text{sinc}(4t) \quad (65)$$

Consequentemente, o sinal  $x(2t)$  é o seguinte:

$$x(2t) = 2 \exp^{-4t} u(t) - 8 \text{sinc}(8t) \quad (66)$$

## Processo 2

Aplicando a propriedade *time-scale* tem-se que o espectro do sinal  $x(2t)$  é dado por:

$$\frac{1}{|2|} X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{|2|} \left( \frac{1}{1+j\pi\left(\frac{f}{2}\right)} - 2\Pi\left(\frac{f}{4}\right) \right) \quad (67)$$

Desenvolvendo a equação (67), chega-se à expressão simplificada do espectro:

$$= \frac{1}{|2|} \left( \frac{2}{2+j\pi f} \right) - \frac{1}{|2|} 2\Pi\left(\frac{f}{8}\right) = \left( \frac{2}{4+j2\pi f} \right) - \Pi\left(\frac{f}{8}\right) \quad (68)$$

Calculando a transformada inversa obtemos a expressão de  $x(2t)$ :

$$x(2t) = TF^{-1} \left[ \frac{2}{4+j2\pi f} \right] - TF^{-1} \left[ \Pi\left(\frac{f}{8}\right) \right] \quad (69)$$

$$x(2t) = 2TF^{-1} \left[ \frac{1}{4+j2\pi f} \right] - 8TF^{-1} \left[ \frac{1}{8} \Pi\left(\frac{f}{8}\right) \right] = 2 \exp^{-4t} u(t) - 8 \text{sinc}(8t) \quad (70)$$