

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Engenharia Informática e de Computadores

Teoria dos Sinais e dos Sistemas
Série de Fourier: tópicos principais e exemplos de cálculo.

Artur Ferreira {arturj@cc.isel.ipl.pt}

22 Fevereiro 2005

Versão 1.0

Motivação e Objectivos

Este documento tem como objectivo apresentar os tópicos mais relevantes relacionados com a série de *Fourier*, enquadrando-os com o programa da disciplina. A apresentação dos tópicos assenta na análise de sinais como vectores e no conceito de base ortonormada. Interpretam-se as equações de análise e de síntese da série, exploram-se as propriedades e simetrias. Apresentam-se exemplos de cálculo, exemplifica-se o uso das tabelas de pares típicos e propõem-se exercícios. A consulta deste documento não substitui a bibliografia recomendada [1, 2, 3, 4, 5].

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos utilizados	1
2.1	Produto interno	1
2.2	Base ortonormada	2
2.2.1	Propriedades dos coeficientes de projecção	2
2.3	Relação entre sinais, sistemas e vectores	3
2.3.1	Exemplos de base ortonormada	3
2.4	Base ortonormada para sinais periódicos	4
2.4.1	Relações e propriedades úteis	4
2.4.2	Base ortonormada de sinais reais	5
2.4.3	Base ortonormada de sinais complexos	6
2.4.4	Base ortonormada de exponenciais complexas	6
2.4.5	Base ortonormada de exponenciais complexas - generalização para kf_o	7
3	Série de <i>Fourier</i>	7
3.1	Equação de síntese	7
3.2	Equação de análise	7
3.2.1	Interpretação dos coeficientes $X[k]$	8
3.2.2	Cálculo da potência	9
3.2.3	Função densidade espectral de potência	10
3.3	Pontos notáveis, propriedades e simetrias	10
3.3.1	Pontos notáveis	10
3.3.2	Propriedades e simetrias	10
4	Exemplos de cálculo	11
4.1	Soma de número finito de sinusóides	12
4.2	Onda quadrada: soma de número infinito de sinusóides	12
4.2.1	Síntese da onda quadrada	14
4.2.2	Onda quadrada: simetria ímpar	14
4.3	Tabelas de pares típicos e propriedades	16
4.3.1	Exemplos de cálculo	16
4.4	Relação com a transformada de <i>Fourier</i>	18
5	Exercícios propostos	18
6	<i>Links</i> interessantes	19

1 Introdução

O presente documento está organizado da forma que a seguir se descreve. A secção 2 apresenta os conceitos fundamentais, leccionados na disciplina, sobre os quais a exposição do restante documento assenta. A secção 3 trata da definição da série de *Fourier*, as suas equações de análise e síntese, pontos notáveis e simetrias. A secção 4 contém exemplos de cálculo para sinais de largura de banda finita e infinita. Na secção 5 propõem-se exercícios de aplicação desses conceitos e na secção 6 listam-se alguns links relacionados com este tema.

2 Conceitos utilizados

A série de *Fourier*¹ aplica-se a sinais periódicos. Um sinal é periódico (ou estritamente repetitivo) se cumprir a condição:

$$x(t) = x(t + kT_o),$$

em que T_o representa o período fundamental do sinal e k é inteiro relativo não nulo. A frequência fundamental f_o , ou seja, a frequência à qual o sinal se repete define-se como $f_o = \frac{1}{T_o}$. A ideia essencial da série de *Fourier* consiste em decompor o sinal $x(t)$ à custa das suas componentes de frequência (kf_o), calculando a projecção (contribuição) de cada componente de frequência na constituição do sinal. Para analisar a série de *Fourier*, recorre-se à análise de sinais como vectores e ao uso de base ortonormada.

2.1 Produto interno

Sejam os vectores $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ e $\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$. O produto interno entre estes dois vectores define-se como

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i. \quad (1)$$

De forma semelhante, define-se o produto interno para sinais contínuos, discretos, de energia e de potência, tal como se apresenta na tabela 1, considerando sinais com amplitude complexa. Note-se que \int_T e \sum_N , representam o cálculo do integral e do somatório num período, respectivamente.

Tipo	Contínuo	Discreto
Energia	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$
Potência	$\frac{1}{T} \int_T x(t)y^*(t) dt$	$\frac{1}{N} \sum_N x[n]y^*[n]$

Tabela 1: Definição do produto interno para os quatro tipos de sinal com amplitudes complexas.

Considerando que os sinais são reais, o produto interno passa a estar definido da forma apresentada na tabela 2. Verifica-se que o produto interno de um sinal consigo próprio resulta na energia (para sinais do tipo

Tipo	Contínuo	Discreto
Energia	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]$
Potência	$\frac{1}{T} \int_T x(t)y(t) dt$	$\frac{1}{N} \sum_N x[n]y[n]$

Tabela 2: Definição do produto interno para os quatro tipos de sinal com amplitudes reais.

energia) ou potência desse sinal (para sinais do tipo potência). Por exemplo, para sinais de energia contínuos com amplitudes reais tem-se

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = E_x.$$

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html>

Considerando sinais periódicos contínuos com amplitude complexa obtém-se

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t)x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = P_x.$$

2.2 Base ortonormada

Define-se como base ortonormada um conjunto de vectores (sinais) de norma unitária e ortogonais entre si. Seja $\Phi = \{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \dots, \vec{\Phi}_N\}$ um conjunto com N vectores ortogonais e de norma unitária, ou seja, verificam a condição

$$\langle \vec{\Phi}_m, \vec{\Phi}_l \rangle = \begin{cases} \|\vec{\Phi}_m\|^2, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases} = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases} \quad (2)$$

Este conjunto gera um espaço vectorial de dimensão N . Qualquer elemento \vec{x} , desse espaço pode ser escrito na forma de combinação linear dos vectores de base:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k = \alpha_1 \vec{\Phi}_1 + \alpha_2 \vec{\Phi}_2 + \dots + \alpha_N \vec{\Phi}_N. \quad (3)$$

Os coeficientes α_k da combinação linear resultam da projecção do vector \vec{x} sobre os N vectores de base:

$$\alpha_k = \frac{\langle \vec{x}, \vec{\Phi}_k \rangle}{\|\vec{\Phi}_k\|^2} = \langle \vec{x}, \vec{\Phi}_k \rangle. \quad (4)$$

A equação (3) pode ser escrita na forma

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k = \sum_{k=1}^N \langle \vec{x}, \vec{\Phi}_k \rangle \vec{\Phi}_k. \quad (5)$$

2.2.1 Propriedades dos coeficientes de projecção

Sejam

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k \quad \text{e} \quad \vec{y} = \sum_{k=1}^N \beta_k \vec{\Phi}_k,$$

dois vectores (sinais) correctamente expressos sobre a mesma base ortonormada. Os coeficientes de projecção (α_k e β_k) sobre a base ortonormada, possuem as seguintes propriedades:

1. o produto interno entre dois vectores (sinais) pode ser efectuado através dos coeficientes de projecção;
2. o cálculo da energia/potência pode ser efectuado através dos coeficientes de projecção.

Em seguida, demonstram-se estas propriedades. O produto interno entre estes dois sinais é dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^N \alpha_k \vec{\Phi}_k, \sum_{k=1}^N \beta_k \vec{\Phi}_k \right\rangle \\ &= \langle \alpha_1 \vec{\Phi}_1 + \alpha_2 \vec{\Phi}_2 + \dots + \alpha_N \vec{\Phi}_N, \beta_1 \vec{\Phi}_1 + \beta_2 \vec{\Phi}_2 + \dots + \beta_N \vec{\Phi}_N \rangle \\ &= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{\langle \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_1 \rangle}_1 + \alpha_1 \beta_2 \underbrace{\langle \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2 \rangle}_0 + \dots + \alpha_1 \beta_N \underbrace{\langle \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_N \rangle}_0 \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 \underbrace{\langle \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_1 \rangle}_0 + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{\langle \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_2 \rangle}_1 + \dots + \alpha_N \beta_N \underbrace{\langle \vec{\Phi}_N, \vec{\Phi}_N \rangle}_1 \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_N \beta_N = \sum_{k=1}^N \alpha_k \beta_k, \end{aligned} \quad (6)$$

ou seja, o produto interno entre os sinais equivale ao produto interno entre os N coeficientes de projecção. Caso os coeficientes sejam complexos tem-se que o produto interno é

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k \beta_k^*.$$

A segunda propriedade demonstra-se a partir da primeira, fazendo $\vec{x} = \vec{y}$:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k \alpha_k^* = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2.$$

Note-se que o produto interno de um sinal consigo próprio resulta na energia ou potência desse sinal, para sinais de energia e potência, respectivamente. Desta forma, resulta que para sinais de energia

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = E_x = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2, \quad (7)$$

enquanto que para sinais de potência se obtém

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = P_x = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2. \quad (8)$$

2.3 Relação entre sinais, sistemas e vectores

A equação (3) é realizada pelo sistema misturador apresentado na figura 1, no qual se aplicam os sinais de base na entrada e os factores de amplificação são os coeficientes de projecção. Este diagrama é genérico, ou seja, adequa-se aos quatro tipos de sinal, referidos anteriormente.

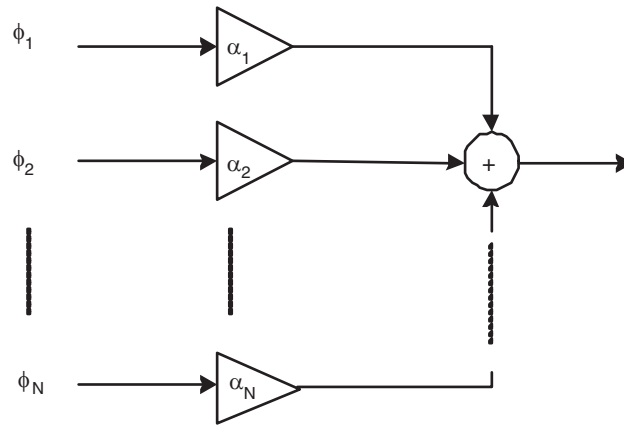


Figura 1: Ilustração da representação de sinais à custa da base ortonormada.

2.3.1 Exemplos de base ortonormada

Apresentam-se exemplos de bases ortonormadas constituídas por sinais discretos e contínuos, periódicos e não periódicos.

Sinais contínuos de energia

A figura 2 mostra três sinais disjuntos no tempo que por consequência são ortogonais entre si. Verifica-se que todos têm norma (energia) unitária com $A=C=1$ e $B=\sqrt{0.1}$. Nesta situação obtém-se uma base ortonormada.

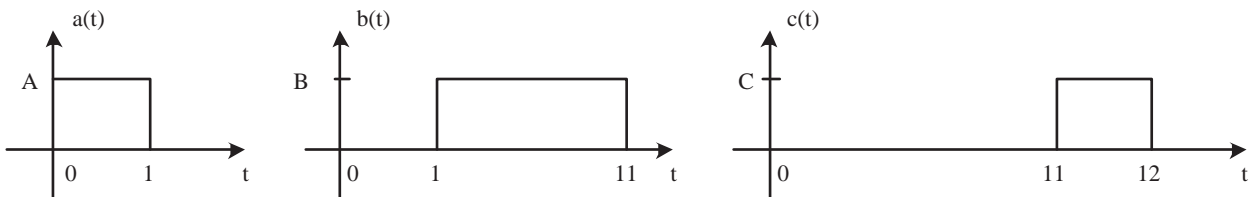


Figura 2: Base ortonormada, constituída por três sinais contínuos de energia.

Sinais discretos de energia

A figura 3 exemplifica uma base ortonormada com quatro sinais discretos de energia. Note-se que sinais disjuntos

no tempo são ortogonais entre si e a recíproca não é verdadeira. A ortogonalidade entre sinais não implica que estes sejam disjuntos no tempo.

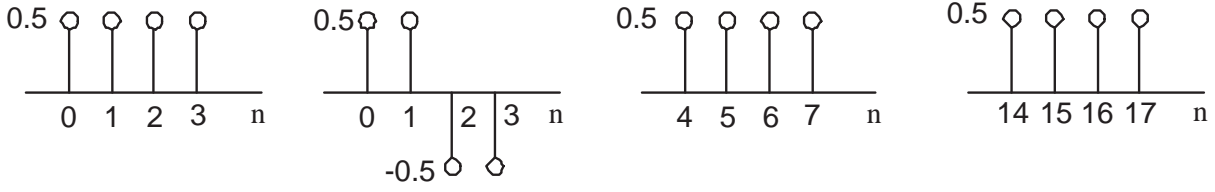


Figura 3: Base ortonormada, constituída por quatro sinais discretos de energia.

Sinais contínuos de potência

As sinusóides $x(t) = A \cos(2\pi f_o t)$ e $y(t) = B \sin(2\pi f_o t)$ são ortogonais e como tal formam base ortogonal. De facto, calculando o produto interno entre os dois sinais tem-se

$$\begin{aligned}
 \langle x(t), y(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_o t) B \sin(2\pi f_o t) dt \\
 &= \frac{AB}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_o t) \sin(2\pi f_o t) dt = \frac{AB}{2T} \int_0^T \sin(2\pi 2f_o t) dt \\
 &= \frac{AB}{2T} \frac{1}{2\pi 2f_o} \underbrace{(-\cos(2\pi 2f_o T) - (-\cos(0)))}_1 \\
 &= \frac{AB}{2T} \frac{1}{2\pi 2f_o} \underbrace{(-\cos(4\pi) + \cos(0))}_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Neste cálculo, utiliza-se a identidade trigonométrica $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.

A potência de um sinal sinusoidal $a(t) = A \cos(2\pi f_o t + \phi)$ é $\frac{A^2}{2}$, tal como a seguir se demonstra

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \cos(2\pi f_o t + \phi))^2 dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_o t + \phi) dt = \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi 2f_o t + 2\phi) dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2\pi 2f_o t + 2\phi) dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \frac{1}{2} T + \frac{A^2}{T} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi 2f_o} \underbrace{(\sin(2\pi 2f_o T + 2\phi) - \sin(0 + 2\phi))}_1 \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{T} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi 2f_o} \underbrace{(\sin(4\pi + 2\phi) - \sin(2\phi))}_0 = \frac{A^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Verifica-se assim que para a base ser ortonormada é necessário que $A = B = \pm\sqrt{2}$, para $P_x = \frac{(\pm\sqrt{2})^2}{2} = 1$. Conclui-se que os sinais

$$\{x(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi f_o t), y(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi f_o t)\},$$

constituem base ortonormada completa para a frequência f_o . Qualquer sinal que contenha apenas a frequência f_o é completamente representável nesta base.

2.4 Base ortonormada para sinais periódicos

2.4.1 Relações e propriedades úteis

As identidades trigonométricas apresentadas de seguida são designadas por fórmulas do produto:

- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$;
- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b)$;

- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b)$.

Estas relações são úteis no cálculo do produto interno entre sinais sinusoidais. A função sinusoidal também possui a propriedade de, num ou mais períodos completos², a sua integração é nula. Considerando $k \in \mathcal{Z}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(2\pi k f_o t + \phi) dt &= \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi k f_o} (A \sin(2\pi k \underbrace{f_o T}_1 + \phi) - A \sin(0 + \phi)) \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi k f_o} \underbrace{(A \sin(2\pi k + \phi) - A \sin(0 + \phi))}_0 \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi k f_o} \underbrace{(A \sin(\phi) - A \sin(\phi))}_0 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Esta propriedade foi utilizada na equação (10).

2.4.2 Base ortonormada de sinais reais

A título de exemplo, considerem-se os sinais periódicos de frequência fundamental 50 Hz:

- $x(t) = 3 \cos(2\pi 50t) + 2 \cos(2\pi 100t)$;
- $y(t) = 3 \sin(2\pi 50t)$.

Seja a base ortonormada definida por $\{\sqrt{2} \cos(2\pi 50t), \sqrt{2} \cos(2\pi 100t)\}$. A norma (potência) unitária é assegurada pelo facto da amplitude ser $\sqrt{2}$. Verifica-se ainda que os sinais são ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{2} \cos(2\pi 50t), \sqrt{2} \cos(2\pi 100t) \rangle &= 2 \langle \cos(2\pi 50t), \cos(2\pi 100t) \rangle = \frac{2}{50} \int_0^{\frac{1}{50}} \cos(2\pi 50t) \cos(2\pi 100t) dt \\ &= \frac{2}{50} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{50}} \cos(2\pi 150t) dt}_0 + \frac{2}{50} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{50}} \cos(2\pi(-50)t) dt}_0 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

A representação de $x(t)$ nesta base é dada por:

$$x(t) = \underbrace{\frac{3}{\sqrt{2}}}_{\alpha_1} \sqrt{2} \cos(2\pi 50t) + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}}_{\alpha_2} \sqrt{2} \cos(2\pi 100t).$$

No caso do sinal $y(t) = 3 \sin(2\pi 50t)$, verifica-se que este não se projecta na base, dada a ortogonalidade entre seno e co-seno. O primeiro coeficiente de projecção é dado por

$$\langle y(t), \sqrt{2} \cos(2\pi 50t) \rangle = 3\sqrt{2} \frac{1}{50} \int_0^{\frac{1}{50}} \sin(2\pi 50t) \cos(2\pi 50t) dt = 3\sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{1}{50} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{50}} \sin(2\pi 100t) dt}_0 = 0.$$

O segundo coeficiente de projecção é

$$\begin{aligned} \langle y(t), \sqrt{2} \cos(2\pi 100t) \rangle &= 3\sqrt{2} \frac{1}{50} \int_0^{\frac{1}{50}} \sin(2\pi 50t) \cos(2\pi 100t) dt \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{50} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{50}} \sin(2\pi 150t) dt}_0 + \frac{3\sqrt{2}}{50} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{50}} \sin(2\pi(-50)t) dt}_0 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Desta forma, conclui-se que a base anterior não é completa para a representação de sinais com componentes de frequência 50 e 100 Hz. Pelo mesmo motivo, não é possível representar o sinal $x(t)$ sobre a base ortonormada $\{\sqrt{2} \sin(2\pi 50t), \sqrt{2} \sin(2\pi 100t)\}$.

²Em número inteiro de períodos.

2.4.3 Base ortonormada de sinais complexos

Dados os resultados apresentados, e pretendendo obter uma base completa para a representação de sinais periódicos, chega-se à necessidade de:

1. utilizar as componentes seno e co-seno em cada frequência (porque estas são ortogonais);
2. não misturar as projecções destas duas componentes.
3. manter a base ortonormada.

Desta forma, os sinais de base devem ser complexos, para que as projecções em co-seno e seno co-existam para cada frequência. Chega-se assim à base ortonormada constituída por:

$$\{\exp(j2\pi 50t), \exp(j2\pi(-50)t), \exp(j2\pi 100t), \exp(j2\pi(-100)t)\}.$$

A representação dos sinais $x(t)$ e $y(t)$ nesta base é dada por:

- $x(t) = \frac{3}{2} \exp(j2\pi 50t) + \frac{3}{2} \exp(j2\pi(-50)t) + \exp(j2\pi 100t) + \exp(j2\pi(-100)t)$;
- $y(t) = -j\frac{3}{2} \exp(j2\pi 50t) + j\frac{3}{2} \exp(j2\pi(-50)t)$;

Verifica-se que os coeficientes de projecção são números complexos. Esta representação é obtida pela aplicação das fórmulas de Euler:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)}{2} = \frac{1}{2} \exp(j\alpha) + \frac{1}{2} \exp(-j\alpha). \\ \sin(\alpha) &= \frac{\exp(j\alpha) - \exp(-j\alpha)}{2j} = -\frac{j}{2} \exp(j\alpha) + \frac{j}{2} \exp(-j\alpha). \end{aligned}$$

2.4.4 Base ortonormada de exponenciais complexas

Demonstra-se que as exponenciais complexas constituem base ortonormada para a representação de sinais periódicos. Por exemplo, seja $\Phi = \{\exp(j2\pi f_o t), \exp(-j2\pi f_o t)\}$. Verifica-se que estes dois sinais constituem base ortonormada se:

- 1) possuem norma unitária (o que neste caso corresponde a potência unitária);
- 2) são ortogonais.

Aplicando a definição de potência tem-se

$$P = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |\exp(j2\pi f_o t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} 1 dt = 1.$$

Este cálculo também pode ser efectuado da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t)x^*(t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \exp(j2\pi f_o t) \exp(-j2\pi f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} 1 dt = 1.$$

Calculando o produto interno verifica-se

$$\begin{aligned} \langle \exp(j2\pi f_o t), \exp(-j2\pi f_o t) \rangle &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \exp(j2\pi f_o t) \exp(-j2\pi f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \exp(j2\pi 2f_o t) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \underbrace{\int_0^{T_o} \cos(2\pi 2f_o t) dt}_0 + j \frac{1}{T_o} \underbrace{\int_0^{T_o} \sin(2\pi 2f_o t) dt}_0 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Conclui-se assim que os sinais têm potência (norma) unitária e são ortogonais.

2.4.5 Base ortonormada de exponenciais complexas - generalização para kf_o

O conjunto de sinais $\exp(j2\pi kf_o t)$, com $k \in \mathcal{Z}$ constitui base ortonormada. Dado que já se demonstrou que a potência (norma) destes sinais é unitária, basta verificar o produto interno entre todos os sinais. Sejam $k_1, k_2 \in \mathcal{Z}$ tais que $k_1 \neq k_2$.

$$\begin{aligned}
 \langle \exp(j2\pi k_1 f_o t), \exp(j2\pi k_2 f_o t) \rangle &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \exp(j2\pi k_1 f_o t) \exp(-j2\pi k_2 f_o t) dt \\
 &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \exp(j2\pi(k_1 - k_2)f_o t) dt \\
 &= \frac{1}{T_o} \frac{1}{j2\pi(k_1 - k_2)f_o} (\exp(j2\pi(k_1 - k_2) \underbrace{f_o T_o}_1) - \exp(j2\pi(k_1 - k_2)f_o 0)) \\
 &= \frac{1}{j2\pi(k_1 - k_2)} \underbrace{(\exp(j2\pi(k_1 - k_2)) - 1)}_1 = \frac{1}{j2\pi(k_1 - k_2)} (1 - 1) = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

3 Série de *Fourier*

A série de *Fourier* aplica-se a sinais periódicos, ou seja, aqueles que cumprem a condição

$$x(t) = x(t + kT_o),$$

em que T_o representa o período fundamental do sinal enquanto que k é inteiro relativo não nulo ($k \in \mathcal{Z}$). A frequência fundamental f_o , ou seja, a frequência à qual o sinal se repete define-se como $f_o = \frac{1}{T_o}$.

3.1 Equação de síntese

Joseph Fourier demonstrou que um sinal periódico $x(t)$ com frequência fundamental f_o pode ser escrito na forma da soma de sinusóides com frequência f_o e suas múltiplas kf_o

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \exp(j2\pi(kf_o)t), \tag{16}$$

em que $X[k], k \in \mathcal{Z}$ são os coeficientes da série de *Fourier* [1, 2, 3, 4, 5]. Note-se a relação entre as equações (16) e (3). Os coeficientes $X[k]$ constituem a projecção de $x(t)$ sobre a base ortonormada definida por $\exp(j2\pi kf_o t)$, com $k \in \mathcal{Z}$. A equação (16) designa-se por equação de síntese da série complexa de *Fourier* e encontra-se escrita na forma exponencial. Existem outras duas formas de escrita equivalentes (trigonométrica e harmónica) que podem ser encontradas em [2, 5]. Um sinal $x(t)$ pode ser expresso em série de *Fourier*, apenas se cumprir as condições de Dirichlet [2, pág. 213]. Analisando individualmente os termos da equação (16) evidencia-se a escrita na forma do produto coeficiente pela função de base

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \dots + X[-3] \exp(j2\pi(-3f_o)t) + X[-2] \exp(j2\pi(-2f_o)t) + X[-1] \exp(j2\pi(-f_o)t) \\
 &\quad + X[0] \\
 &\quad + X[1] \exp(j2\pi(f_o)t) + X[2] \exp(j2\pi(2f_o)t) + X[3] \exp(j2\pi(3f_o)t) + \dots
 \end{aligned} \tag{17}$$

Cada coeficiente $X[k]$ representa a projecção (contribuição) de cada função base na formação (síntese) do sinal.

3.2 Equação de análise

Os coeficientes $X[k]$ (complexos) são calculados através da projecção do sinal periódico $x(t)$ sobre as funções de base $\exp(j2\pi kf_o t)$.

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \text{proj}_{\exp(j2\pi kf_o t)} x(t) = \frac{\langle x(t), \exp(j2\pi kf_o t) \rangle}{\langle \exp(j2\pi kf_o t), \exp(j2\pi kf_o t) \rangle} \\
 &= \langle x(t), \exp(j2\pi kf_o t) \rangle = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi kf_o t) dt.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Os coeficientes de *Fourier* são os coeficientes de projecção do sinal sobre as várias harmónicas que o constituem e traduzem a contribuição de cada harmónica. Define-se harmónica de ordem k como a frequência kf_o [1, 2, 3, 4, 5].

A equação (18) é referida como equação de análise da série de *Fourier*, dado que os coeficientes $X[k]$ traduzem a análise do sinal, no que respeita à contribuição das componentes de frequência que o constituem. Por exemplo, para $k=0$, tem-se

$$X[0] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi 0 f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) dt = m_x,$$

o que constitui o valor médio do sinal, ou seja, a componente DC. Considerando $k=-1$ e $k=1$ obtém-se a contribuição da frequência fundamental (1ª harmónica)

$$X[-1] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(j2\pi f_o t) dt, \quad X[1] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi f_o t) dt.$$

Considerando $k=-2$ e $k=2$ obtém-se a contribuição da segunda harmónica e assim sucessivamente. A tabela 3 mostra a relação entre o índice k e a frequência correspondente. Tendo em conta a relação apresentada na

k	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Frequência	...	$-3f_o$	$-2f_o$	$-f_o$	0	f_o	$2f_o$	$3f_o$...

Tabela 3: Correspondência entre o índice k e a frequência respectiva.

tabela, estabelece-se a correspondência entre os coeficientes espectrais $X[k]$ e o espectro $X[f]$. Esta relação é ilustrada na figura 4. Verifica-se assim que qualquer sinal periódico possui espectro discreto.

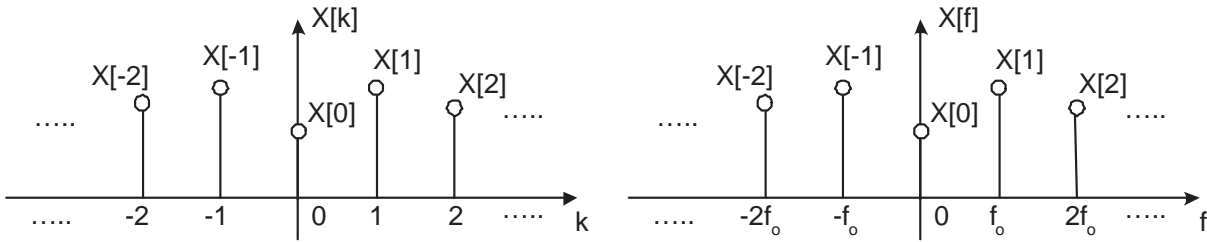


Figura 4: Relação entre os coeficientes espectrais $X[k]$ e o espectro $X[f]$.

3.2.1 Interpretação dos coeficientes $X[k]$

Os coeficientes $X[k]$, obtidos pela projecção de um sinal real ($x(t)$) noutro complexo ($\exp(j2\pi k f_o t)$), são complexos. O valor de $|X[k]|$, traduz a potência, enquanto que $\arg[X[k]]$ se refere ao desfasamento da componente de frequência correspondente a esse coeficiente. Por exemplo, considerem-se as sinusóides $x(t) = A \cos(2\pi f_o t + \phi)$, $y(t) = A \cos(2\pi f_o t)$ e $z(t) = A \sin(2\pi f_o t)$ com a mesma amplitude e frequência, diferindo na fase. A decomposição destes sinais em série de *Fourier*, de acordo com a equação (16), é respectivamente:

- $x(t) = A \cos(2\pi f_o t + \phi) = A \left(\frac{\exp(j(2\pi f_o t + \phi)) + \exp(-j(2\pi f_o t + \phi))}{2} \right) = \frac{A}{2} \exp(j\phi) \exp(j2\pi f_o t) + \frac{A}{2} \exp(-j\phi) \exp(-j2\pi f_o t)$
- $y(t) = A \cos(2\pi f_o t) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi f_o t) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi f_o t)$
- $z(t) = A \sin(2\pi f_o t) = \frac{A}{j2} \exp(j2\pi f_o t) - \frac{A}{j2} \exp(-j2\pi f_o t) = -j\frac{A}{2} \exp(j2\pi f_o t) + j\frac{A}{2} \exp(-j2\pi f_o t)$

Esta decomposição é obtida pela aplicação das fórmulas de Euler. Obtém-se assim os coeficientes da série de *Fourier* para os sinais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ bem como os respectivos espectros.

$$X[k] = \begin{cases} \frac{A}{2} \exp(j\phi), & k = 1 \\ \frac{A}{2} \exp(-j\phi), & k = -1 \end{cases}$$

$$X[f] = \begin{cases} \frac{A}{2} \exp(j\phi), & f = f_o \\ \frac{A}{2} \exp(-j\phi), & f = -f_o \end{cases}$$

$$Y[k] = \begin{cases} \frac{A}{2}, & k = 1 \\ \frac{A}{2}, & k = -1 \end{cases}$$

$$Y[f] = \begin{cases} \frac{A}{2}, & f = f_o \\ \frac{A}{2}, & f = -f_o \end{cases}$$

$$Z[k] = \begin{cases} -\frac{jA}{2} = \frac{A}{2} \exp(-j\frac{\pi}{2}), & k = 1 \\ \frac{jA}{2} = \frac{A}{2} \exp(j\frac{\pi}{2}), & k = -1 \end{cases}$$

$$Z[f] = \begin{cases} -\frac{jA}{2} = \frac{A}{2} \exp(-j\frac{\pi}{2}), & f = f_o \\ \frac{jA}{2} = \frac{A}{2} \exp(j\frac{\pi}{2}), & f = -f_o \end{cases}$$

Note-se que a informação relativa à amplitude (potência) das sinusóides consta do módulo dos coeficientes ($|X[k]|$), enquanto que o desfasamento é representado através do argumento dos coeficientes ($\arg[X[k]]$). Fazendo $\phi = 0$ sobre o sinal $x(t)$, obtém-se o sinal $y(t)$. Verifica-se que a diferença entre $X[k]$ e $Y[k]$ é o argumento (fase) dos coeficientes. Considerando $\phi = -\frac{\pi}{2}$ sobre $x(t)$, obtém-se o sinal $z(t)$. A figura 5 ilustra a relação entre amplitude, frequência e fase, expressas no domínio do tempo e no domínio da frequência.

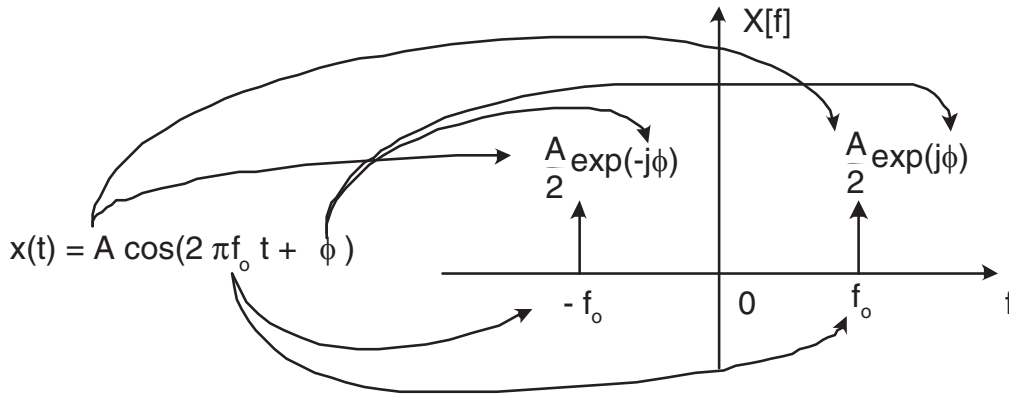


Figura 5: Correspondência entre tempo e frequência para o sinal sinusoidal.

3.2.2 Cálculo da potência

Dado que as exponenciais complexas constituem base ortonormada, os coeficientes da série de *Fourier* podem ser vistos como a projecção do sinal sobre essa base ortonormada. Nestas condições, de acordo com a equação (8), a potência do sinal pode ser calculada através do Teorema de Parseval [1, 2, 4, 5]:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2.$$

Verifica-se então que, a potência contida em determinada frequência pode ser obtida através da soma do módulo ao quadrado dos coeficientes correspondentes a essa frequência. Por exemplo, a potência DC (contida na componente de frequência zero) é dada por

$$P_{DC} = |X[0]|^2,$$

enquanto que a percentagem de potência DC é

$$\%P_{DC} = \frac{|X[0]|^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2}.$$

Por sua vez, a potência contida na frequência fundamental é $P_{f_o} = |X[-1]|^2 + |X[1]|^2$ e a percentagem de potência contida na frequência fundamental é dada por

$$\%P_{f_o} = \frac{|X[-1]|^2 + |X[1]|^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2}.$$

3.2.3 Função densidade espectral de potência

A função densidade espectral de potência define-se como $S_x[f] = |X[f]|^2$ e representa a distribuição da potência ao longo do espectro do sinal. Verifica-se que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2 = P_x.$$

3.3 Pontos notáveis, propriedades e simetrias

3.3.1 Pontos notáveis

Seja $x(t)$ um sinal real. Fazendo $k=0$ sobre a equação de análise, tem-se

$$X[0] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi 0 f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) dt = m_x,$$

o que corresponde ao valor médio do sinal num período (componente DC, ou de frequência zero). De outra forma, fazendo $t=0$ sobre a equação de síntese obtém-se

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \exp(j2\pi k f_o 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]. \quad (19)$$

3.3.2 Propriedades e simetrias

Os espectros obtidos pela decomposição em série apresentam diversos tipos de simetria, resumidos na tabela 4, na qual se consideram apenas sinais reais no tempo. Em seguida, demonstram-se estas simetrias.

Tempo: $(x(t))$	Frequência: $(X[k] \dots X[f])$
Real e par	Real e par
Real e ímpar	Imaginário e ímpar
Real	Simetria complexa conjugada

Tabela 4: Simetria do espectro em função da simetria no tempo; $x(t)$ é sinal real.

Sinal real

Tendo em conta a equação de análise

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) (\cos(2\pi k f_o t) - j \sin(2\pi k f_o t)) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \cos(2\pi k f_o t) dt - j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \sin(2\pi k f_o t) dt \end{aligned} \quad (20)$$

e a decomposição de um sinal em componentes par e ímpar

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{x_e(t)} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{x_o(t)}, \quad (21)$$

tem-se

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} (x_e(t) + x_o(t)) \cos(2\pi k f_o t) dt - j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} (x_e(t) + x_o(t)) \sin(2\pi k f_o t) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi k f_o t) dt + \underbrace{\frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \cos(2\pi k f_o t) dt}_0 \\ &\quad - j \underbrace{\frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \sin(2\pi k f_o t) dt}_0 - j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi k f_o t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Dado que o *co-seno* tem simetria par³ e o *seno* simetria ímpar⁴, verifica-se que apenas dois dos quatro termos apresentados na equação (22) são não nulos, pelo que

$$X[k] = \underbrace{\frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi k f_o t) dt}_{\text{Re}[X[k]]} - j \underbrace{\frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi k f_o t) dt}_{\text{Im}[X[k]]} \quad (23)$$

Sobre a equação (23), considerando valores positivos e negativos para k , constata-se que a parte real do espectro tem o mesmo valor para k positivo ou negativo, enquanto que a parte imaginária é simétrica, fazendo com que o espectro seja complexo conjugado, em torno da frequência zero, ou seja, o espectro exibe simetria complexa conjugada. Por consequência, o módulo do espectro tem simetria par, enquanto que o argumento tem simetria ímpar. Atendendo às simetrias de seno e co-seno, a expressão de $\overline{X}[-k]$ é

$$X[-k] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi k f_o t) dt + j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi k f_o t) dt \quad (24)$$

Sinal real par

Na situação em que $x(t)$ tem simetria par (ou seja $x(t) = x_e(t)$), a equação (23) toma a forma

$$X[k] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi k f_o t) dt, \quad (25)$$

verificando-se que $X[k] = X[-k]$:

$$X[-k] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi(-k) f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_e(t) \cos(2\pi k f_o t) dt. \quad (26)$$

Conclui-se que o espectro, para além de real, apresenta simetria par.

Sinal real ímpar

Caso $x(t)$ tenha simetria ímpar ($x(t) = x_o(t)$), a equação (23) reduz-se a

$$X[k] = -j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi k f_o t) dt, \quad (27)$$

verificando-se que o espectro é imaginário puro. Por outro lado, $X[k] = -X[-k]$:

$$X[-k] = -j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi(-k) f_o t) dt = j \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x_o(t) \sin(2\pi k f_o t) dt, \quad (28)$$

concluindo-se também que o espectro apresenta simetria ímpar.

Conclui-se assim que a componente par do sinal no tempo é representada na parte real do espectro e a componente ímpar corresponde à parte imaginária do espectro. A figura 6 ilustra esta correspondência.



Figura 6: Relação entre a simetria no tempo e a simetria na frequência.

4 Exemplos de cálculo

Nesta secção apresentam-se alguns exemplos de cálculo da decomposição de sinais na série de *Fourier*. Usam-se as propriedades e as simetrias apresentadas.

³ $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
⁴ $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

4.1 Soma de número finito de sinusóides

A título de exemplo, apresenta-se a decomposição de vários sinais periódicos na série de *Fourier*, através da utilização das fórmulas de *Euler*, para seno e co-seno.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 4 \cos(2\pi 100t) + 2 \cos(2\pi 200t) \\
 &= 4 \left(\frac{\exp(j2\pi 100t) + \exp(-j2\pi 100t)}{2} \right) + 2 \left(\frac{\exp(j2\pi 200t) + \exp(-j2\pi 200t)}{2} \right) \\
 &= \underbrace{2}_{X[1]} \exp(j2\pi 100t) + \underbrace{2}_{X[-1]} \exp(-j2\pi 100t) + \underbrace{1}_{X[2]} \exp(j2\pi 200t) + \underbrace{1}_{X[-2]} \exp(-j2\pi 200t) \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1 + 2 \sin(2\pi 45t) = 1 + 2 \left(\frac{\exp(j2\pi 45t) - \exp(-j2\pi 45t)}{2j} \right) \\
 &= \underbrace{1}_{Y[0]} - \underbrace{j}_{Y[1]} \exp(j2\pi 45t) + \underbrace{j}_{Y[-1]} \exp(-j2\pi 45t) \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= 3 \cos(2\pi 10t) + \sin(2\pi 10t) \\
 &= \left(3 \frac{\exp(j2\pi 10t) + \exp(-j2\pi 10t)}{2} \right) + \left(\frac{\exp(j2\pi 10t) - \exp(-j2\pi 10t)}{2j} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \exp(j2\pi 10t) + \frac{3}{2} \exp(-j2\pi 10t) + \frac{1}{2j} \exp(j2\pi 10t) - \frac{1}{2j} \exp(-j2\pi 10t) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{3}{2} - j \frac{1}{2} \right)}_{Z[1]} \exp(j2\pi 10t) + \underbrace{\left(\frac{3}{2} + j \frac{1}{2} \right)}_{Z[-1]} \exp(-j2\pi 10t) \quad (31)
 \end{aligned}$$

O sinal $x(t)$ tem simetria par, (ou seja, o sinal coincide com a sua componente par) pelo que o seu espectro é real e par. Os sinais $y(t)$ e $z(t)$ têm componentes par e ímpar, tais que

$$y(t) = \underbrace{1}_{y_e(t)} + 2 \underbrace{\sin(2\pi 45t)}_{y_o(t)} \quad z(t) = \underbrace{3 \cos(2\pi 10t)}_{z_e(t)} + \underbrace{\sin(2\pi 10t)}_{z_o(t)}.$$

Os espectros $Y[f]$ e $Z[f]$ possuem simetria complexa conjugada.

4.2 Onda quadrada: soma de número infinito de sinusóides

Considere a onda quadrada de simetria par (trem de pulsos rectangulares) apresentada na figura 7. Dado que

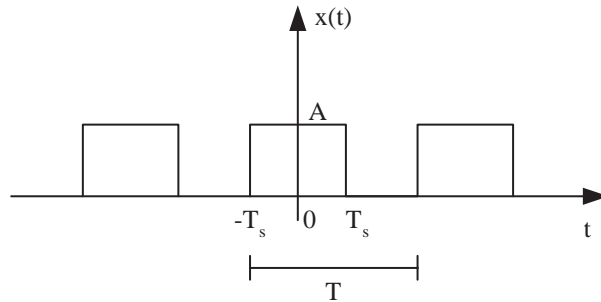


Figura 7: Onda quadrada de simetria par.

a onda quadrada é constituída pela soma de número infinito de sinusóides, os seus coeficientes espectrais são dados por

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \text{proj}_{\exp(j2\pi k f_o t)} x(t) = \langle x(t), \exp(j2\pi k f_o t) \rangle \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{-T_s}^{T_s} A \exp(-j2\pi k f_o t) dt = \frac{A}{T} \frac{1}{-j2\pi k f_o} (\exp(-j2\pi k f_o T_s) - \exp(j2\pi k f_o T_s)) \\
&= \frac{A}{T} \frac{1}{\pi k f_o} \left(\frac{\exp(-j2\pi k f_o T_s) - \exp(j2\pi k f_o T_s)}{-j2} \right) \\
&= \frac{A}{T} \frac{1}{\pi k f_o} \sin(2\pi k f_o T_s) = \frac{A2T_s}{T} \frac{\sin(2\pi k f_o T_s)}{2\pi k f_o T_s} \\
&= A \frac{2T_s}{T} \text{sinc}(2k f_o T_s) = A \frac{2T_s}{T} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T}\right), \tag{32}
\end{aligned}$$

em que A é a amplitude máxima e $\frac{2T_s}{T}$ é o *duty cycle* da onda. Verifica-se que $X[k]$ é um sinal real com simetria par⁵: $X[k] = X[-k]$. A equação de síntese da série de *Fourier*, usando a expressão dos coeficientes espectrais, obtida na equação (32) fica

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(j2\pi k f_o t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \frac{2T_s}{T} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T}\right) \exp(j2\pi k f_o t) \\
&= A \frac{2T_s}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T}\right) \exp(j2\pi k f_o t). \tag{33}
\end{aligned}$$

Considerando $A=2$ e o *duty cycle* $\frac{2T_s}{T} = 0.5$ obtêm-se os coeficientes espectrais através da expressão

$$X[k] = 2 \times 0.5 \times \text{sinc}(k \cdot 0.5) = \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

e apresentados na figura 8. Na parte de cima da figura mostram-se os coeficientes e na parte de baixo exibe-se o correspondente sinal no tempo. Note-se que, nestas condições o valor médio da onda quadrada é $X[0] = A \frac{2T_s}{T} \text{sinc}(0) = 2 \times 0.5 \times 1 = 1$.

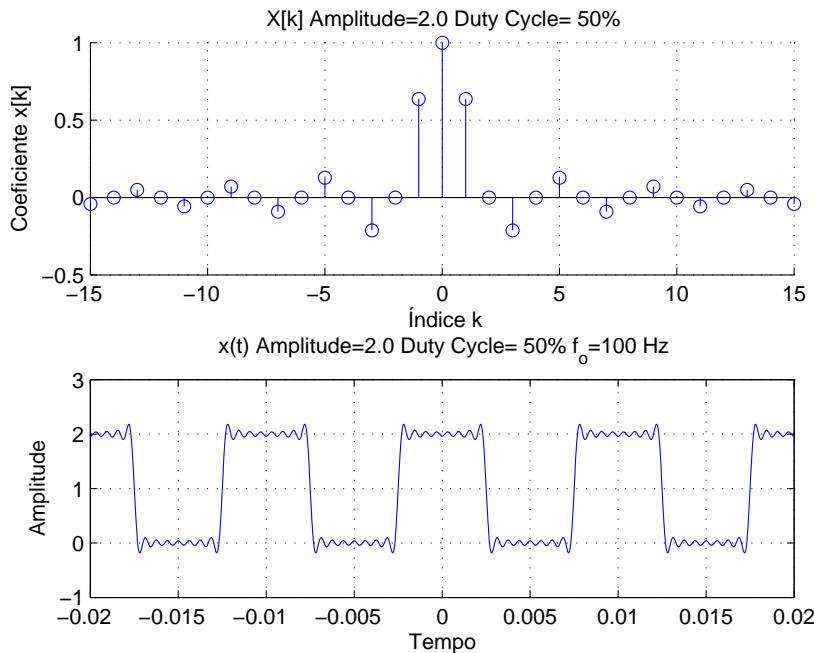


Figura 8: Onda quadrada de simetria par: coeficientes $X[k]$ e sinal $x(t)$, com amplitude 2 e *duty cycle* 50%.

Considerando o *duty cycle* $\frac{2T_s}{T} = 0.25$, os coeficientes espectrais alteram-se para

$$X[k] = A \frac{2T_s}{T} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T}\right) = 2 \times 0.25 \times \text{sinc}(k \cdot 0.25) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{4}\right),$$

obtendo-se a figura 9.

⁵A função sinc é real e par.

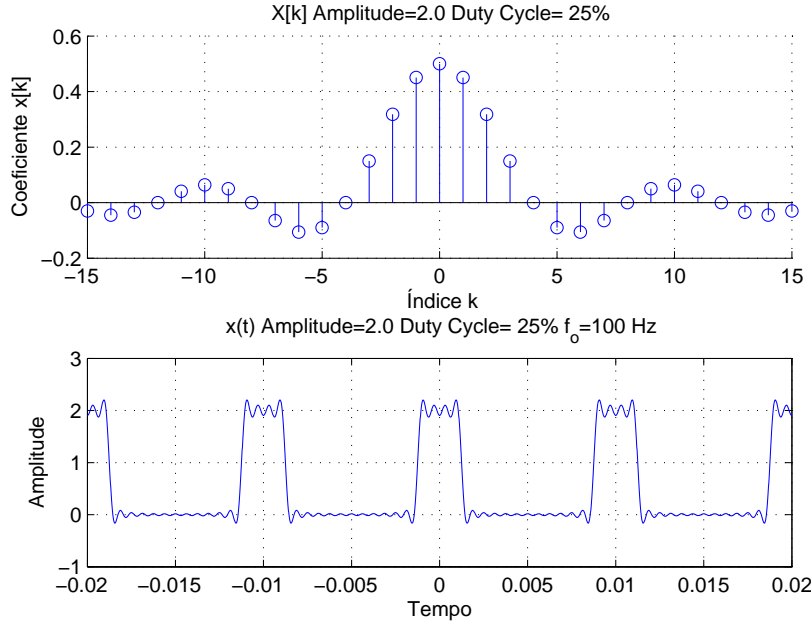


Figura 9: Onda quadrada de simetria par: coeficientes $X[k]$ e sinal $x(t)$, com amplitude 2 e *duty cycle* 25%.

4.2.1 Síntese da onda quadrada

Efectuando a síntese da onda quadrada utilizando a expressão

$$x(t) = A \frac{2T_s}{T} \sum_{k=-L}^L \text{sinc} \left(k \frac{2T_s}{T} \right) \exp(j2\pi k f_o t),$$

com $A = 2$, $\frac{2T_s}{T} = 0.5$ e $L \in \{3, 5, 9, 19\}$, obtêm-se os sinais apresentados na figura 10. Em cada patamar da onda existem L pontos de inflexão (mínimos/máximos). Esta característica é designada como fenómeno de Gibbs [4].

4.2.2 Onda quadrada: simetria ímpar

Considerando agora a onda quadrada com simetria ímpar (figura 11), pelas propriedades enunciadas na tabela 4, verifica-se que este sinal tem espectro imaginário e ímpar. Os coeficientes espectrais $X[k]$ são calculados através de

$$\begin{aligned} X[k] &= \text{proj}_{\exp(j2\pi k f_o t)} x(t) = \langle x(t), \exp(j2\pi k f_o t) \rangle \\ &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^0 -\exp(-j2\pi k f_o t) dt + \frac{1}{T_o} \int_0^{\frac{T_o}{2}} \exp(-j2\pi k f_o t) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \frac{-1}{-j2\pi k f_o} \left(\exp(-j2\pi k f_o 0) - \exp \left(-j2\pi k f_o \left(\frac{-T_o}{2} \right) \right) \right) \\ &+ \frac{1}{T_o} \frac{1}{-j2\pi k f_o} \left(\exp \left(-j2\pi k f_o \left(\frac{T_o}{2} \right) \right) - \exp(-j2\pi k f_o 0) \right) \\ &= \frac{1}{j2\pi k} (1 - \exp(j\pi k)) - \frac{1}{j2\pi k} (\exp(-j\pi k) - 1) \\ &= \frac{1}{j2\pi k} (1 - \exp(j\pi k) - \exp(-j\pi k) + 1) \\ &= \frac{1}{j2\pi k} (2 - (\exp(j\pi k) + \exp(-j\pi k))) \end{aligned}$$

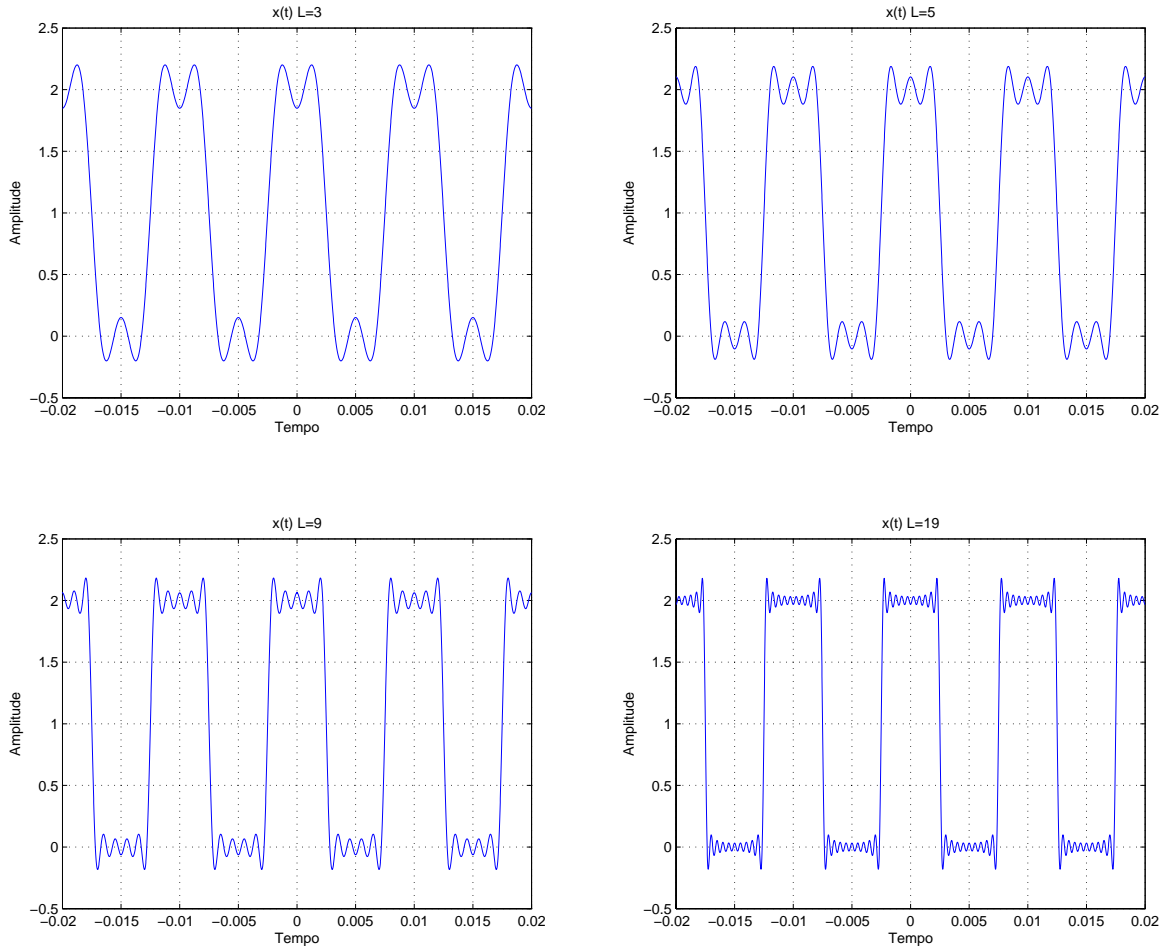


Figura 10: Onda quadrada de simetria par, com amplitude 2, *duty cycle* 50% e $L \in \{3, 5, 9, 19\}$ harmônicas.

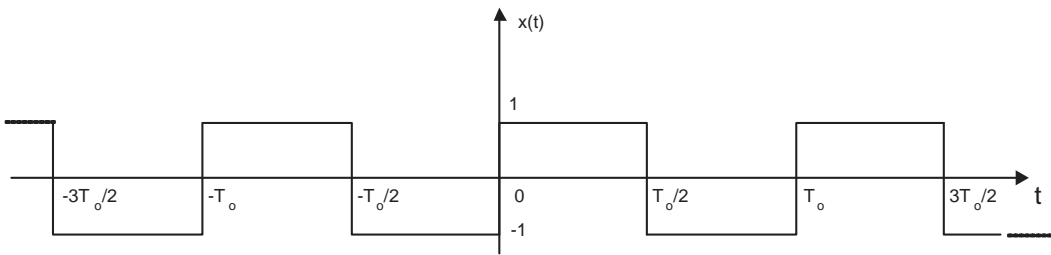


Figura 11: Onda quadrada de simetria ímpar.

$$= \frac{1}{j2\pi k} (2 - 2 \cos(\pi k)) = \frac{1 - \cos(\pi k)}{j\pi k}. \quad (34)$$

Verifica-se que

$$\cos(\pi k) = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ -1, & k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Por consequência

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1-1}{j\pi k} = 0, & k \text{ par} \\ \frac{1-(-1)}{j\pi k} = \frac{2}{j\pi k}, & k \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (35)$$

No caso de $k=0$, resulta a indeterminação $\frac{0}{0}$. Após levantamento da indeterminação conclui-se que $X[0] = 0$, ou seja, a onda quadrada tem valor médio nulo. Observando as equações (34) e (35), verifica-se que o espectro é imaginário puro, com simetria ímpar, tal como esperado. Por exemplo, $X[1] = \frac{2}{j\pi} = -j\frac{2}{\pi}$ e $X[-1] = -\frac{2}{j\pi} = j\frac{2}{\pi}$.

4.3 Tabelas de pares típicos e propriedades

A tabela 5 apresenta alguns pares típicos da série de *Fourier* [1]. Note-se as ondas quadradas para as quais foram calculados os coeficientes, nas equações (32) e (35). A tabela 6 apresenta algumas propriedades da série

Sinal	Tempo: $x(t)$, periódico em T_o	Frequência: $X[k]$
Sinusóide	$A \cos(2\pi f_o t + \phi)$	$\begin{cases} \frac{A}{2} \exp(j\phi), & k = 1 \\ \frac{A}{2} \exp(-j\phi), & k = -1 \end{cases}$
Onda quadrada par	$A \Pi\left(\frac{t}{2T_s}\right), t < T_s$	$A \frac{2T_s}{T_o} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T_o}\right)$
Onda quadrada ímpar	$\begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_o}{2} \\ -1, & -\frac{T_o}{2} < t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{2}{j\pi k}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$
Onda triangular (par)	$1 - \frac{4 t }{T_o}, t < \frac{T_o}{2}$	$\begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ ímpar} \end{cases}$
Onda dente de serra	$\frac{t}{T_o}, 0 < t < T_o$	$\begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{j}{2\pi k}, & k \neq 0 \end{cases}$

Tabela 5: Alguns pares típicos da série de *Fourier*.

de *Fourier* [1].

Propriedade	Tempo: $x(t)$	Frequência: $X[k] \dots X[f]$
Linearidade	$ax(t) + b$	$\begin{cases} aX[0] + b, & k = 0 \\ aX[k], & k \neq 0 \end{cases}$
<i>Time-shift</i>	$x(t - b)$	$X[k] \exp(-j2\pi k f_o b)$
<i>Time-scale</i>	$x(at)$	$X\left[\frac{f}{a}\right]$

Tabela 6: Algumas propriedades da série de *Fourier*.

4.3.1 Exemplos de cálculo

Exemplo 1

A título de exemplo de utilização e conjugação das duas tabelas, considere-se o sinal cujo espectro é

$$Z[k] = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ \frac{j}{\pi k}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Verifica-se que o sinal $Z[k]$ pode ser obtido à custa do espectro da onda dente de serra, designado por $X[k]$, efectuando as operações

$$Z[k] = \begin{cases} 2X[k] + 5, & k = 0 \\ 2X[k], & k \neq 0. \end{cases}$$

Por consequência tem-se $z(t) = 2x(t) + 5$ em que $x(t)$ representa a onda dente de serra apresentada na tabela. Aplicando a equação de síntese, utilizando os coeficientes da tabela e os coeficientes $Z[k]$ obtêm-se os sinais apresentados na figura 12, respectivamente. Para o desenho destes gráficos, atribui-se $f_o = 100$ Hz e utilizam-se 1500 harmónicas na síntese dos sinais.

Exemplo 2

Pretende-se calcular o espectro do sinal periódico $w(t)$ apresentado na figura 13. Analisando o sinal verifica-se que é uma onda triangular de simetria par e período fundamental $T_o = \frac{1}{4}$. Nestas condições, através da tabela 5 tem-se a expressão

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - \frac{4|t|}{T_o}, |t| < \frac{T_o}{2} \\ &= 1 - \frac{4|t|}{\frac{1}{4}}, |t| < \frac{1}{2} \\ &= 1 - 16|t|, |t| < \frac{1}{8}, \end{aligned} \tag{36}$$

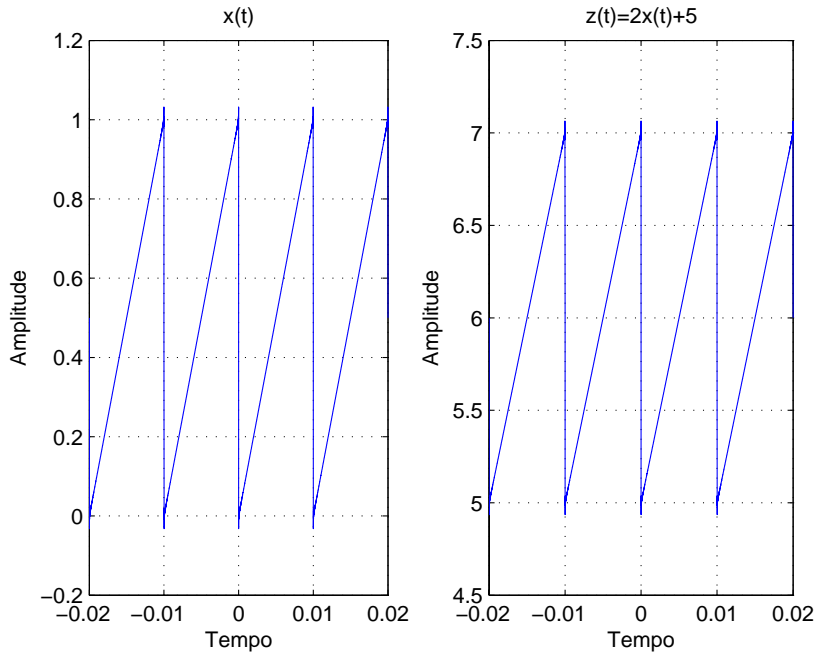


Figura 12: Ondas dente de serra: versão da tabela $(x(t))$ e $z(t) = 2x(t) + 5$.

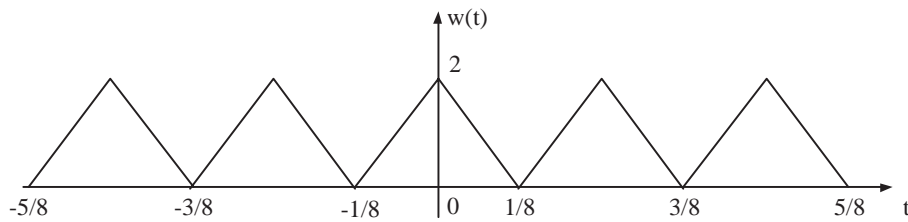


Figura 13: Onda triangular $w(t)$.

que corresponde ao sinal $x(t)$ da figura 14. Através da comparação das figuras 13 e 14, verifica-se que a diferença

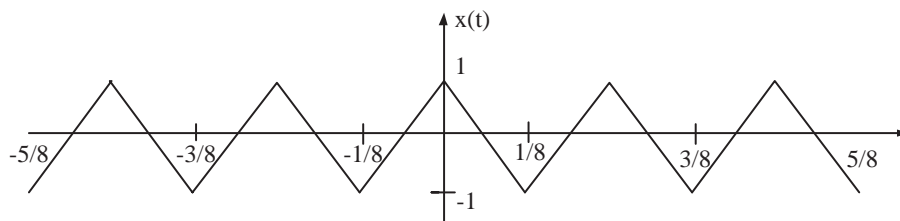


Figura 14: Onda triangular $x(t)$, versão da tabela, com $T_o = \frac{1}{4}$.

entre a onda triangular inicial e a da tabela, consiste apenas no valor médio: $w(t) = x(t) + 1$. Por este motivo, o espectro destes dois sinais difere apenas na frequência zero (para $k=0$). Chega-se assim à conclusão que o espectro de $w(t)$ (com valor médio 1), é dado por

$$W[k] = \begin{cases} 0, & k \text{ par excepto } 0 \\ 1, & k = 0 \\ \left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A regra geral da utilização conjunta destas tabelas consiste em:

1. exprimir o sinal em análise, em função de um ou mais sinais que constam da tabela de pares típicos;
2. aplicar as propriedades da série, e obter o sinal desejado (no tempo ou na frequência).

4.4 Relação com a transformada de *Fourier*

Nesta secção relaciona-se a série de *Fourier* com a transformada de *Fourier*, comparando as equações de análise e de síntese, na tabela 7. Da análise da tabela 7, verifica-se que sinais periódicos possuem espectro discreto

Tipo de sinal	Tempo: $x(t)$	Frequência: $X[k] \dots X[f] \dots X(f)$
Sinal periódico (Série)	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \exp(j2\pi k f_o t)$	$X[k] = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t) dt$
Sinal não periódico (Transformada)	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$

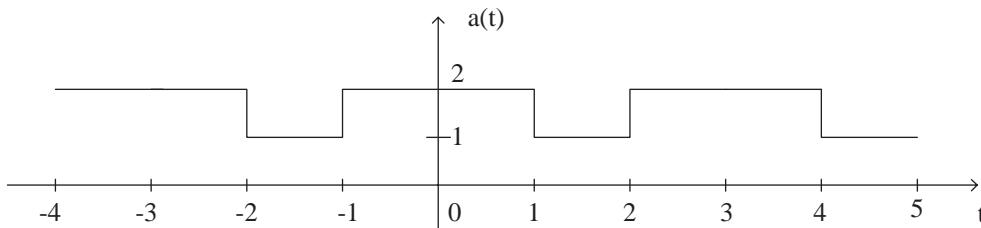
Tabela 7: Comparação entre as equações de análise e de síntese da transformada e da série de *Fourier*.

enquanto que sinais não periódicos têm espectro contínuo.

5 Exercícios propostos

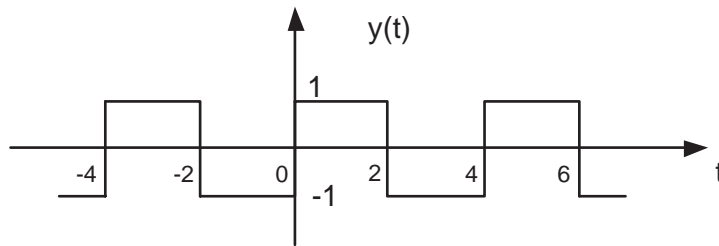
Nesta secção propõem-se exercícios relativos à série de *Fourier*.

- Seja $x(t) = 5 + \cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{4})$ sinal periódico.
 - Considere $y(t) = -12 + 2x(4t)$. Esboce o espectro $Y(f)$ e apresente a sua expressão analítica.
 - Decomponha $x(t)$ nas suas componentes par e ímpar, $x_e(t)$ e $x_o(t)$, respectivamente; indique as potências de $x_e(t)$ e $x_o(t)$.
Sugestão: caso necessário, tenha em conta que $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- Seja $a(t)$ um sinal periódico com a seguinte expressão: $a(t) = 2 + \sin(2\pi 3t) - 2\cos^2(2\pi 5t)$. Seja $b(t) = a(2t)$.
 - Calcule a potência, a energia, o valor médio e a frequência fundamental de $b(t)$;
 - Esboce a função densidade espectral de potência, da componente par de $b(t)$.
- Sejam $x(t) = A + A \cos(w_o t + \phi_1)$ e $y(t) = B \sin(3w_o t)$ dois sinais periódicos. Considere o sinal $z(t) = 2x(t) + y(t)$.
 - Em que condições $x(t)$ e $y(t)$ têm a mesma potência?
 - Exprima $z(t)$ na série de *Fourier* e esboce o módulo e fase do seu espectro; qual o período deste sinal?
 - Calcule o produto interno $\langle x, z \rangle$;
- Considere o sinal periódico, $a(t)$, apresentado na figura abaixo.



- Indique o valor médio, a potência, o *duty cycle* e a largura de banda.
- Calcule a percentagem de potência contida na frequência fundamental.

5. Seja $y(t)$ o sinal periódico apresentado na figura abaixo.



- Exprima o sinal na série de *Fourier* e esboce o seu espectro;
- Indique o valor médio, a potência, a frequência fundamental e a largura de banda do sinal.

6 *Links* interessantes

A lista seguinte contém endereços de páginas WEB que abordam a série de *Fourier*:

- <http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html>
- <http://www.jhu.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm>
- <http://www.jhu.edu/~signals/index.html>
- <http://www.falstad.com/fourier/>
- <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>
- <http://www.sosmath.com/fourier/fourier1/fourier1.html>
- <http://mathforum.org/key/nucalc/fourier.html>
- http://www.efunda.com/math/fourier_series/fourier_series.cfm
- <http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/sound/sound.html>
- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fourier.html>

Referências

- [1] A. Carlson. *Communication Systems*. McGraw-Hill, 4th edition, 2001.
- [2] H. P. Hsu. *Signals and Systems*. McGraw-Hill, 1995.
- [3] J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder. *DSP First - A multimedia approach*. Prentice Hall, 2003.
- [4] A. Oppenheim and A. Willsky. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [5] B. Veen and S. Haykin. *Signals and Systems*. John Wiley & Sons, 1999.