

Estimação de Superfícies Tridimensionais com Modelos Activos

José Nascimento
Instituto Superior de
Engenharia de Lisboa
zen@isel.pt

Jorge S. Marques
Instituto Superior Técnico
Instituto de Sistemas e Robótica
jsm@isr.ist.utl.pt

RESUMO

Esta comunicação aborda a estimação da superfície de objectos a partir de um conjunto de pontos tridimensionais usando modelos activos. Propõe-se, uma extensão da Classe Unificada desenvolvida por Abrantes e Marques. A superfície é discretizada usando dois tipos de redes: redes de malha rectangular e redes Simplex. A Classe Unificada baseia-se no cálculo dos centróides dos dados na vizinhança de amostras pré-definidas da superfície deformável. Os pontos da superfície são atraídos na direcção dos centróides. O artigo revê os conceitos básicos de modelamento activo de superfícies, a Classe Unificada e as redes Simplex. Os modelos descritos são testados usando dados sintéticos e reais obtidos a partir de imagens ecográficas e de ressonância magnética.

1. INTRODUÇÃO

A estimação de superfícies a partir de dados experimentais é uma operação necessária em vários contextos. Por exemplo, em medicina, é útil a visualização de órgãos humanos a partir de dados obtidos por tomografia ou por ecografia. Esta operação pode ser baseada na reconstrução de um volume de dados seguida de métodos de visualização (p. ex., *ray casting*) ou através de estimação directa da superfície do objecto. Outro problema relevante é o da geração automática de modelos CAD a partir de dados experimentais (*Reverse Engineering*). Neste caso, em vez de se projectar o modelo geométrico da peça usando um programa CAD, pretende-se usar um exemplar de uma peça já fabricada para obter um modelo geométrico. A reconstrução de objectos e de cenas através da visão artificial é outra área onde a estimação de superfícies é fundamental. Os problemas anteriores têm um objectivo comum. A diferença reside no tipo de dados disponíveis e na forma típica dos objectos que se pretende reconstruir.

Os modelos activos são uma classe de modelos capazes de estimar a fronteira de objectos. Propostos inicialmente por Kass, Witkin e Terzopoulos [13] em 1987, aproximam a fronteira do objecto através de uma superfície deformável que é estimada iterativamente de forma a minimizar um critério de energia. Ao trabalho pioneiro de Kass seguiram-se varias contribuições (ver p. ex. [4,5,6,15]). No entanto, os algoritmos propostos apresentam limitações: dificuldades em separar dados válidos de dados inválidos e dificuldade na representação de geometrias complexas (p. ex., zonas de elevada

curvatura, concavidades, objectos desconexos) pelo que é necessário o desenvolvimento de métodos alternativos.

Este artigo estuda a estimação de superfícies tridimensionais através de modelos activos. Propõe-se uma extensão da Classe Unificada desenvolvida por Abrantes e Marques em [1, 2] no contexto da estimação de objectos bidimensionais. O modelo consiste num conjunto de vértices que são iterativamente atraídos para os dados existentes na vizinhança de cada vértice. Ao contrário do que acontece no modelo *Snakes* proposto por Kass et al., a Classe Unificada permite a utilização de métodos de aprendizagem competitiva que impedem o colapso dos vértices do modelo ao serem atraídos por dados comuns. A superfície do objecto é aproximada por dois tipos de redes: redes de malha rectangular e rede Simplex.

O artigo está organizado da seguinte forma: a secção 2, apresenta o algoritmo *Snakes*; a secção 3 descreve a Classe Unificada; a secção 4, estuda o modelo baseado em redes Simplex e propõe a modificação deste modelo usando um termo dependente dos dados, baseado em centróides; na secção 5, é realizada uma análise comparativa de ambos os modelos. Os testes são realizados com dados sintéticos e dados reais extraídos de imagens médicas. Os resultados dos desempenhos são discutidos e comparados; a secção 6, conclui sobre os resultados obtidos nos testes.

2. SNAKES 3D

Esta secção descreve o algoritmo *Snakes* 3D. Uma descrição mais completa pode ser encontrada em [4].

O algoritmo *Snakes* 3D [13] parte de uma configuração inicial da superfície que é progressivamente modificada até se adaptar à forma do objecto (ver figura 1). Para isso, admite-se que o modelo tem propriedades elásticas e está sujeito a forças externas que o atraem para os dados.

O modelo é definido por uma função $v : \Omega = [0,1]^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, pertencente a um conjunto Ad de funções admissíveis. A estimação de v é feita de forma a minimizar uma energia $E : Ad \rightarrow \mathfrak{R}$. Uma escolha habitual para a energia é

$$E(v) = \iint_{\Omega} w_{10} \|v_s\|^2 + w_{01} \|v_r\|^2 + 2w_{11} \|v_{sr}\|^2 + w_{20} \|v_{ss}\|^2 + w_{02} \|v_{rr}\|^2 + P(v) dsdr, \quad (2.1)$$

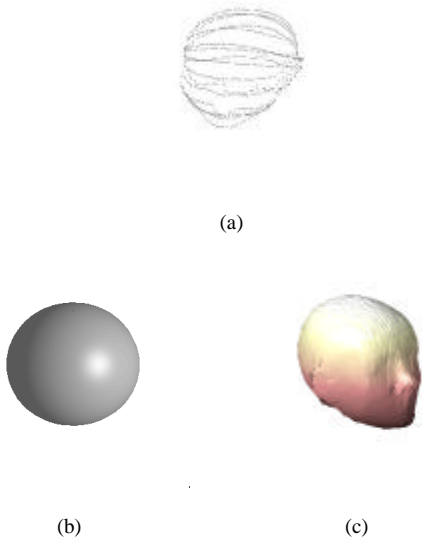


Figura 1. *Snake 3D*: a) Dados; b) Configuração inicial; c) Configuração final.

em que $\| \cdot \|$ designa a norma euclidiana em \mathfrak{R}^3 e $v_s, v_r, v_{sr}, v_{ss}, v_{rr}$ designam as derivadas parciais de v em relação às variáveis independentes s, r . As primeiras cinco parcelas de (2.1) são termos de regularização que penalizam formas irregulares do modelo. Interpretando v como uma superfície física, os coeficientes w_{10} e w_{01} definem a elasticidade da superfície, w_{20} e w_{02} a rigidez e w_{11} a torção da superfície. A última parcela de (2.1) mede o grau de afastamento do modelo em relação aos dados. Usa-se para isso, uma função potencial $P: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$, que depende dos dados observados.

A minimização de (2.1) é um problema de cálculo variacional [14]. Para que v minimize E é necessário que seja uma solução assintótica da equação diferencial de *Euler-Lagrange* dinâmica

$$v_t - w_{10}v_{ss} - w_{01}v_{rr} + 2w_{11}v_{srr} + w_{20}v_{sss} + w_{02}v_{rrr} = F(v), \quad (2.2)$$

em que $F = -\nabla P$. Esta equação é inicializada com uma estimativa da forma do objecto. Se a solução convergir, o termo v_t tende para zero à medida que t tende para infinito e a solução assintótica verifica a equação de *Euler-Lagrange* (estática).

A equação (2.2) só pode ser resolvida analiticamente em casos triviais. Uma alternativa é usar o método das diferenças finitas para a resolução numérica da equação diferencial. Este método baseia-se na discretização da superfície v , aproximando-a através de um conjunto de pontos sendo as derivadas aproximadas por diferenças finitas.

Se adoptarmos uma rede com malha rectangular $s_i = \Delta i, r_j = \Delta j$ (ver figura 2), a equação (2.2) pode ser aproximada numericamente por [4]

$$V^{t+1} = V^t - \mathbf{t}(\mathbf{A}V^t - F(V^t)) \quad (2.3)$$

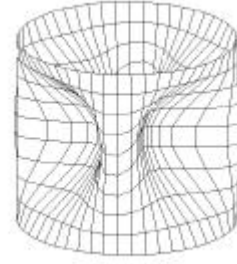


Figura 2. Rede com malha rectangular.

em que V^t e $F(V^t)$ são vectores de dimensões $3N \times 1$ constituídos pelas coordenadas dos pontos da superfície e pelas componentes das respectivas forças externas aplicadas no instante t , \mathbf{A} é uma matriz $3N \times 3N$ dependente dos coeficientes w_{ij} e \mathbf{t} o intervalo de discretização temporal. A equação (2.3) é resolvida iterativamente até V^t convergir para uma configuração final. O número de vértices da rede depende do intervalo de discretização Δ . É frequente usar uma discretização esparsa durante uma fase inicial do processo de adaptação e uma discretização mais fina na fase final (refinamento da malha).

As *Snakes 3D* baseadas no conceito de função potencial independente da forma do modelo apresentam algumas limitações, o que motiva o estudo de métodos alternativos.

3. EXTENSÃO DA CLASSE UNIFICADA

Em seguida apresenta-se uma extensão da Classe Unificada de métodos que permite lidar com o problema de estimação de superfícies. A Classe Unificada foi proposta por Abrantes e Marques [1,2] no contexto da estimação de objectos bidimensionais em imagens. Esta classe inclui como casos particulares as *Snakes* [10], os algoritmos K-médias [12], K-médias difuso [8], os Mapas de Kohonen [11] e redes elásticas [9]. A Classe Unificada minimiza um funcional de custo com dois termos, um termo de regularização e outro dependente dos dados

$$E = \frac{1}{2}V^T \mathbf{A}V - \frac{1}{2} \sum_x \sum_k w_k(x) \|x - v_k\|^2, \quad (3.1)$$

em que V é um vector de vértices do modelo de $3N \times 1$ constituído pelas coordenadas dos pontos da curva e \mathbf{A} é a matriz de regularização de dimensões $3N \times 3N$. A função de peso $w_k(x)$ mede a influência do padrão x no vértice v_k . Assim, $w_k(x)$ exerce uma influência directa no potencial externo. A minimização do funcional (3.1), pode ser realizada pelo algoritmo de gradiente que conduz à recursão [2]

$$V^{t+1} = V^t - \mathbf{t} \mathbf{A}V^t + \mathbf{t} F_{EXT}^t, \quad (3.2)$$

em que F_{EXT}^t é o vector de dimensões $3N \times 1$ que contém as forças externas aplicadas à superfície no instante t , sendo

a força externa exercida sobre o vértice do modelo v_k dada por [2]

$$f_{EXT}(v_k) = \sum_x (x - v_k) \mathbf{J}_k(x), \quad (3.3)$$

em que os pesos $\mathbf{J}_k(x)$ se obtêm a partir dos coeficientes $w_j(x)$.

Um conceito importante neste trabalho é o de região de atracção. Define-se região de atracção de um vértice v_k do modelo, como o conjunto de padrões onde $\mathbf{J}_k(x)$ é maior que um limiar pré-fixado, ou seja, os padrões que produzem atracção significativa sobre v_k . Se a cada região de atracção se associar a massa e o centróide dos dados nessa região, o algoritmo de gradiente pode ser apresentado na forma

$$V^{t+1} = (I - t\mathbf{A})V^t + tD^t(\mathbf{x}^t - V^t), \quad (3.4)$$

onde \mathbf{x} é o vector de centróides das regiões de atracção e D é a matriz diagonal das massas de cada região. Definidos por

$$\mathbf{x}_k = \frac{\sum_x x \mathbf{J}_k(x)}{m_k}, \quad (3.5)$$

$$m_k = \sum_x \mathbf{J}_k(x). \quad (3.6)$$

A equação (3.4) tem uma interpretação simples: cada vértice da rede é atraído na direcção do seu centróide \mathbf{x}_k . As diferenças em relação ao caso bidimensional descrito em [2] residem apenas na estrutura da matriz \mathbf{A} e no facto dos dados e dos vértices serem agora pontos do espaço \mathfrak{R}^3 . Admite-se implicitamente que a superfície é representada por uma rede de malha rectangular o que apenas influencia o termo de regularização e a matriz \mathbf{A} .

4. REDES SIMPLEX

As redes Simplex, propostas por Delinguette [7] apresentam maior flexibilidade topológica que as redes de malha rectangular estudadas anteriormente. As redes Simplex adaptam o modelo à superfície do objecto através de forças internas e forças externas, tal como os métodos anteriores. As forças internas penalizam formas irregulares. As forças externas atraem os pontos da rede na direcção da superfície do objecto. A topologia da rede (número de vértices, ligações) pode ser alterada durante o processo de adaptação, transformando-a numa outra rede topologicamente diferente. As alterações topológicas são usadas para melhorar o desempenho da rede, na presença de vários objectos, de objectos com topologias complexas, ou quando há zonas de curvatura elevada que necessitem de um modelamento mais fino.

A rede Simplex é constituída por um conjunto de vértices V e de ligações. Todos os vértices têm igual número de ligações. Uma rede Simplex de conectividade

$k+1$ é definida por um grafo (V, N) em que V é o conjunto de vértices e N o conjunto de ligações entre vértices. A forma geométrica da rede é definida pelas posições dos vértices, e a topologia definida pela função de conectividade N .

Quando $k=1$, a rede é neste caso uma linha poligonal capaz de aproximar uma curva no espaço (ver exemplo na figura 3a). Para representar superfícies de objectos tridimensionais consideram-se estruturas com $k=2$ (ver figura 3b). Cada vértice v_i está ligado a três outros vértices $v_{N_1(i)}, v_{N_2(i)}, v_{N_3(i)}$.

Delinguette propõe em [7] um método para estimação dos parâmetros de rede. Admite que cada vértice da rede é um corpo de massa m actuado por forças internas e externas. Cada vértice verifica a lei de Newton:

$$m \frac{d^2 v_i}{dt^2} = -\mathbf{g} \frac{dv_i}{dt} + F_{INT} + F_{EXT}, \quad (4.1)$$

onde m é a massa do vértice e \mathbf{g} o factor de amortecimento, F_{INT} representa uma força interna e F_{EXT} a força externa que atrai o vértice para a superfície do objecto. Aplicando o método das diferenças finitas à equação (4.1) vem

$$v_i^{t+1} = v_i^t + \left(1 - \mathbf{g} \frac{t}{m}\right) (v_i^t - v_i^{t-1}) + \frac{t^2}{m} F_{INT}^t + \frac{t^2}{m} F_{EXT}^t. \quad (4.2)$$

Os vértices são inicializados com uma estimativa inicial da forma do objecto e são actualizados iterativamente usando (4.2) até convergirem para valores estacionários. As forças internas aplicadas ao modelo são definidas por

$$F_{INT_i} = \mathbf{a}_i (v_i - \hat{v}_i). \quad (4.3)$$

onde \mathbf{a}_i é um ganho que controla a influência das forças internas e \hat{v}_i é o ponto que se obtém projectando v_i no plano formado pelos vértices vizinhos $(v_{N_1(i)}, v_{N_2(i)}, v_{N_3(i)})$. A força externa que atrai o modelo para o objecto, não deriva de um potencial como nas *Snakes 3D*. Calcula-se usando a distância do vértice ao ponto do objecto mais próximo à semelhança do que é feito no algoritmo ICP [3]. Assim,

$$F_{EXT} = \mathbf{b}_i G \left(\frac{\|v_i - x_{p(i)}\|}{D} \right) N_i^T (v_i - x_{p(i)}) \cdot N_i, \quad (4.4)$$

onde $x_{p(i)}$ denota a observação (ponto) mais próxima do vértice v_i e $G(x)$ é a função que determina a distância a partir do qual os pontos do objecto exercem uma menor força de atracção sobre a rede.

A força externa actua na direcção da normal ao plano definido pelos vértices $(v_{N_1(i)}, v_{N_2(i)}, v_{N_3(i)})$.

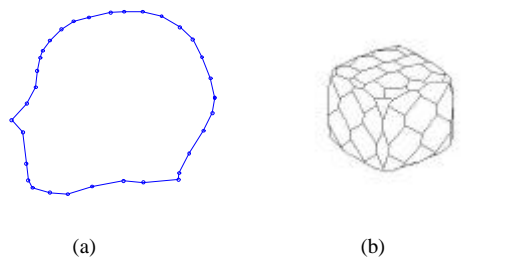


Figura 3. Redes Simplex: a) conectividade $k=1$; b) conectividade $k=2$.

As redes Simplex podem ser usadas no contexto do modelo Unificado, basta, para isso, substituir as forças externas (4.4) pelas forças externas do modelo Unificado (3.3). As redes Simplex permitem o uso de métodos automáticos de inserção e eliminação de vértices [7], que possibilitam o refinamento da rede em zonas mal representadas e representação de objectos de topologias complexas (p. ex., objectos desconexos).

5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Dois tipos de testes são realizados para avaliar os algoritmos descritos: testes com dados sintéticos e testes com dados reais, usando imagens ecográficas e de tomografia computadorizada. Em qualquer dos casos a informação disponível para a reconstrução é constituída por pontos.

5.1. Condições de Teste

Usou-se como modelo inicial uma superfície esférica, na qual foram definidos 64 vértices no caso da rede de malha rectangular e 168 vértices no caso da rede Simplex (ver figura 4). Optou-se, neste trabalho, que o número de vértices dos modelos varia dinamicamente, ou seja, ambos os modelos têm um refinamento da sua malha, que é realizado automaticamente.

Para avaliar o desempenho dos diversos algoritmos contabiliza-se o número de iterações dispendido e medem-se as distâncias relativas médias e máximas dos pontos do modelo, v , aos pontos, x , do objecto ($d_{av}^v(x, v)$, $d_{\max}^v(x, v)$) e vice-versa ($d_{av}^x(x, v)$, $d_{\max}^x(x, v)$).

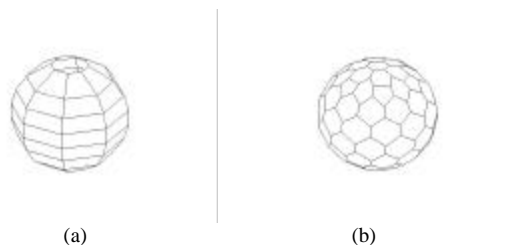


Figura 4. Modelo inicial: a) malha rectangular; b) rede Simplex.

5.2. Testes com Dados Sintéticos

Os modelos descritos são testados com um conjunto de objectos sintéticos. Estes apresentam características convexas, côncavas, arestas e vértices. Os algoritmos são também testados com vários objectos em cena ou com objectos de topologia mais complexa. Na figura 5 apresentam-se quatro objectos sintéticos constituídos por uma média de 518 pontos fronteira.

A tabela 1 apresenta a média dos resultados com objectos sintéticos. Nesta, destacam-se os resultados obtidos com a rede Simplex, onde cada vértice do modelo representa sempre um ponto da fronteira do objecto. O algoritmo K-médias difuso tem resultados bons com a malha rectangular.

Na figura 6 apresenta-se a posição final dos modelos no problema da garrafa e na figura 7 a posição final para o problema da torre. Verifica-se, neste problema que os algoritmos em geral, tem dificuldade em representar as zonas estreitas do objecto. No problema da torre o algoritmo *Snakes* tem dificuldade em representar as arestas interiores. Neste caso, as redes elásticas conseguem ter melhores resultados. A rede Simplex têm os vértices da rede desorganizados.

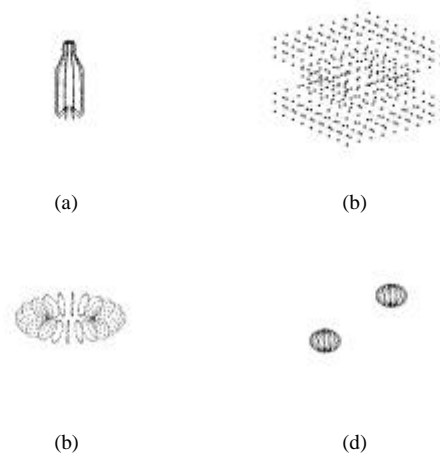


Figura 5. Dados Sintéticos: a) garrafa; b) torre norte; c) toróide; d) duas esferas.

Tabela 1. Média das medidas de desempenho com objectos sintéticos.

Objectos Sintéticos		$d_{av}^v(x, v)$	$d_{\max}^v(x, v)$	$d_{av}^x(x, v)$	$d_{\max}^x(x, v)$	N_{iter}
Grelha Rectangular	<i>Snakes</i>	1.7	9.1	2.3	9.5	32.8
	<i>K-médias</i>	5.3	9.8	2.1	6.2	22.6
	<i>K-médias Difuso</i>	2.7	10.6	1.3	4.4	26.8
	<i>Mapas de Kohonen</i>	3.7	10.2	1.7	6.4	25.8
	<i>Redes Elásticas</i>	2.0	5.0	1.5	4.4	37.8
Rede Simplex	<i>Força do vizinho mais próximo</i>	0.0	0.0	1.7	4.6	19.8
	<i>K-médias Difuso</i>	0.8	3.4	1.9	4.7	38.6

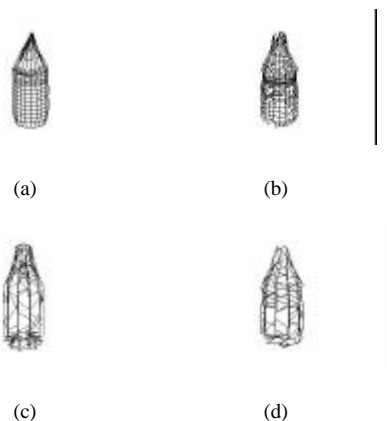


Figura 6. Resultados obtidos com: a) *Snakes*; b) K-médias difuso; c) rede Simplex; d) rede Simplex modificada.

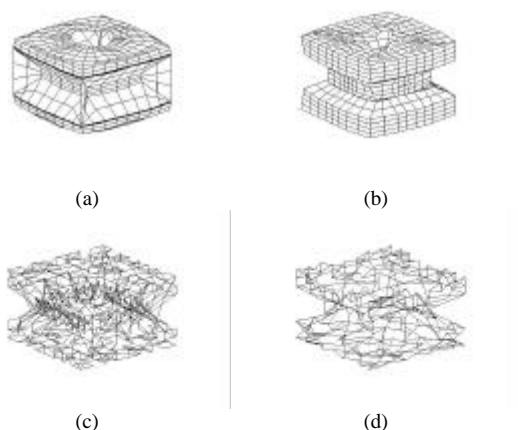


Figura 7. Resultados obtidos com: a) *Snakes*; b) redes elásticas; c) rede Simplex; d) rede Simplex modificada.

No problema da toróide, conclui-se que os algoritmos tem dificuldade em representar os pontos interiores deste objecto (ver figura 8a). O modelo Simplex, dado que o algoritmo pode suprimir e inserir vértices na rede, tem a possibilidade de fechar a parte interior do objecto, como se apresenta na figura 8b.

Em situações com vários objectos, por exemplo duas esferas, os algoritmos têm dificuldades, pois existem vértices do modelo que tentam representar os pontos fronteira dos dois objectos. Por exemplo, na figura 9 apresenta-se a posição final do modelo com o algoritmo redes elásticas.

A rede Simplex, por sua vez, consegue suprimir vértices, de forma a cortar a rede em duas e posteriormente insere vértices para fechar cada uma das esferas (ver figura 10).



Figura 8. Resultados obtidos com: a) algoritmo K-médias difuso; b) rede Simplex.



Figura 9. Resultados obtidos com redes elásticas

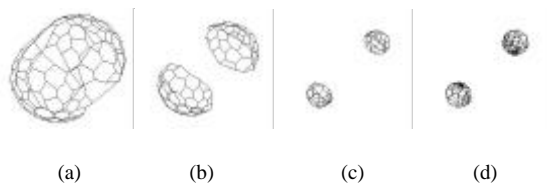


Figura 10. Rede Simplex na iteração: a) 2; b) 4; c) 15; d) posição final.

5.3. Testes com Dados Reais

Apresenta-se nesta secção a reconstrução da superfície de um crânio obtida a partir de 53 imagens tomográficas. As imagens foram adquiridas em planos paralelos e equidistantes, tendo cada uma imagem dimensão de 128x128 pixels, representada com 256 níveis de cinzento. Apresentam-se na figura 11 duas destas imagens.

Para obter os pontos 3D, aplicou-se a cada imagem um algoritmo de detecção de contornos devido ao elevado número de pontos de contorno. Optou-se por fazer uma filtragem prévia das imagens, onde é calculada uma estimativa local da variância na vizinhança de cada pixel. Posteriormente, extrai-se automaticamente o contorno externo da cabeça em cada imagem com curvas *Snakes*. Esta é inicializada em cada uma das imagens com o contorno estimado na imagem anterior.

A tabela 2 apresenta as medidas de desempenho para o problema do crânio. Neste caso, destacam-se as redes Simplex e a rede rectangular com o algoritmo K-médias difuso, à semelhança do que acontece com a média dos resultados sintéticos.

Na figura 12a apresenta-se o resultado do modelo com o algoritmo *Snakes*, mostrando que em geral o crânio é bem representado por este modelo. Na figura 12b mostra-se um corte do modelo sobreposto à imagem tomográfica no plano $z=0$. O modelo capta a geometria global da cabeça mas representa com dificuldade alguns aspectos em detalhe, por exemplo abaixo do nariz, dado que este tem uma concavidade mais acentuada. A rede Simplex apresenta um resultado semelhante, ou seja, representa de uma forma geral o crânio como se apresenta na figura 12c e 12d.

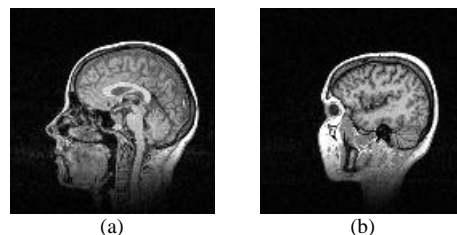


Figura 11. Imagens de Ressonância magnética do crânio

Tabela 2. Medidas de desempenho no problema do crânio.

Crânio		$d_{av}^v(x, v)$	$d_{max}^v(x, v)$	$d_{av}^x(x, v)$	$d_{max}^x(x, v)$	N_{iter}
Grelha Rectangular	Snakes	2.5	10.0	1.4	5.6	27
	K-médias	3.7	15.3	1.6	5.2	20
	K-médias Difuso	2.6	13.0	1.0	3.7	39
	Mapas de Kohonen	3.8	13.4	1.7	7.4	37
	Redes Elásticas	2.6	2.8	1.2	3.9	48
Rede Simplex	Força do vizinho mais próximo	0.0	0.0	1.6	4.9	19
	K-médias Difuso	0.5	7.8	1.9	5.0	39

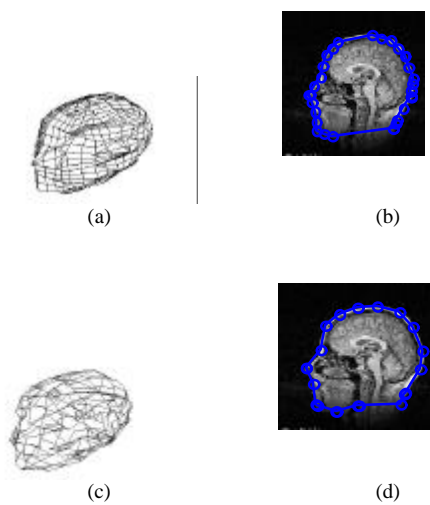


Figura 12 a) Resultados obtidos com Snakes com refinamento b) Ressonância magnética do crânio e contorno do modelo com algoritmo Snakes c) Resultados obtidos com rede Simplex com refinamento d) Ressonância magnética do crânio e contorno da rede Simplex.

6. CONCLUSÕES

Este artigo estuda a estimação de objectos tridimensionais a partir de pontos da sua superfície detectados por sensores. Propõe-se um método baseado no formalismo unificado desenvolvido por Abrantes e Marques [2]. O método é testado usando dois tipos de discretização da superfície: redes de malha rectangular e redes Simplex. As redes de malha rectangular são mais simples e obtêm-se discretizando a superfície para valores equiespaçados das variáveis independentes que parametrizam a superfície do objecto. Garantem por isso uma ordenação natural dos vértices na superfície do objecto. As redes Simplex são mais flexíveis pois permitem mudanças topológicas através de inserção e eliminação de vértices. Não permitem a ordenação dos vértices da rede e o modelo tem um aspecto mais desorganizado. Os resultados experimentais obtidos com os dois métodos são comparáveis. Realçam-se ainda as vantagens obtidas quando se usa aprendizagem competitiva como acontece com o método de K-médias difuso em relação ao algoritmo Snakes.

REFERÊNCIAS

- [1] A. J. Abrantes, "Extracção de Contornos de Objectos: Uma Perspectiva Unificadora", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, 1998.
- [2] A. J. Abrantes e J. S. Marques, "A Class of Constrained Clustering Algorithms for object Boundary Extraction", IEEE Trans. Image Processing, 5(11): 1507-1521, 1996.
- [3] P. J. Besl e N. D. McKay, "A Method for Registration of 3D Shapes", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(2): pp 239-256, 1992.
- [4] L. Cohen e I. Cohen, "Finite-Element Methods for Active Contour Models and Balloons for 2D and 3D Images", IEEE Transactions of Pattern Anal. Machine Intell., 15(11), 1131-1147, 1993.
- [5] Laurent D. Cohen e Isaac Cohen, "A Finite Element Method Applied to New Active Contour Models and 3D Reconstruction from Cross Sections" in Proc. Third International Conference on Computer Vision, Osaka, Japan, pp 587-591, 1990.
- [6] D. DeCarlo e D. Metaxas, "Shape Evolution With Structural and Topological Changes Using Blending", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 20, n° 11, 1998.
- [7] H. Delingette, "Simplex Meshes: A General Representation for 3D Shape Reconstruction", Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp 856-859, 1994.
- [8] J. Dunn, "A Fuzzy Relative of the Isodata Process and Its Use in Detecting Compact, Well-Separated Clusters", J Cybern, vol. 3, pp 32-57, 1973.
- [9] R. Durbin e D. Willshaw, "An Analog Approach to the Travelling Salesman Problem Using an Elastic Net Method", Nature, vol 326, pp 689-691, 1987.
- [10] M. Kass, A. Witkin e D. Terzopoulos, "Snakes: Active Contour Models", International Journal of Computer Vision, vol. 1, pp. 321-331, 1987.
- [11] T. Kohonen, "Clustering, Taxonomy, and Topological Maps of Patterns", Proc. 6th Int. Conf. On Pattern Recognition, 1982.
- [12] J. McQueen, "Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations", Proc. 5th Berkley Symp. Math. Stat. and Prob. Vol. I, Univ. California Press, pp 281-286, 1967.
- [13] D. Terzopoulos, A. Witkin e M. Kass, "Constraints on deformable Models: Recovering 3D Shape and Nonrigid Motion", Artificial Intelligence, 36(1):91-123, 1988.
- [14] A. Tikhonov e V. Arsénine, "Méthodes de Résolution de Problemes Mal Posés", Éditions MIR, Moscovo, 1974.
- [15] K. Yoshino, T. Kawashima e Y. Aoki, "Dynamic Reconfiguration of Active Net Structure", Asian Conference on Computer Vision, Osaka – Japan, pp 23-25, 1993.